

УПРАВЛІННЯ ОСВІТИ І НАУКИ
ЧЕРКАСЬКОЇ ОБЛАСНОЇ ДЕРЖАВНОЇ АДМІНІСТРАЦІЇ
КОМУНАЛЬНИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД «ЧЕРКАСЬКИЙ ОБЛАСНИЙ
ІНСТИТУТ ПІСЛЯДИПЛОМНОЇ ОСВІТИ ПЕДАГОГІЧНИХ ПРАЦІВНИКІВ
ЧЕРКАСЬКОЇ ОБЛАСНОЇ РАДИ»

**МАТЕРІАЛИ ДЛЯ ПРОВЕДЕННЯ ЗАНЯТЬ
ФАКУЛЬТАТИВНОГО КУРСУ
«МАТЕМАТИЧНИЙ КАЛЕЙДОСКОП»
Посібник для вчителя**

**Черкаси
2023**

УДК 51 (076)
К 34

Рекомендовано до друку Вченою радою КНЗ «ЧОПОПП Черкаської обласної ради». Протокол № 2 від 2 червня 2023 року

АВТОРИ:

Козлова О.М., методист математики лабораторії природничо-математичних дисциплін комунального навчального закладу «Черкаський обласний інститут післядипломної освіти педагогічних працівників Черкаської обласної ради»;

Перебийніс С.М., Бурлуцька І.І., учителі математики Смілянської загальноосвітньої школи І-ІІІ ступенів № 10 Смілянської міської ради Черкаської області

РЕЦЕНЗЕНТИ:

Норкіна О.В., доцент кафедри дошкільної освіти та професійного розвитку педагогів комунального навчального закладу «Черкаський обласний інститут післядипломної освіти педагогічних працівників Черкаської обласної ради», кандидат педагогічних наук;

Ходоровська С.І., учитель математики Кам'янського еколого-економічного ліцею Кам'янської міської ради Черкаської області

К34 Козлова О. М., Перебийніс С.М., Бурлуцька І.І. Матеріали для проведення занять факультативного курсу «Математичний калейдоскоп»: посібник для вчителя. Черкаси: ЧОПОПП, 2023. 82 с.

Посібник містить авторські розробки 35 занять факультативного курсу з математики «Математичний калейдоскоп» для учнів 5 класу.

Може бути використаний для організації позакласних занять з учнями 5 класу, доповнення уроків математики, підготовки учнів до участі в конкурсах та олімпіадах.

Для вчителів математики, студентів педагогічних університетів.

Зміст

Передмова.....	4
Обчислювальний практикум	
Заняття 1–3. Магічні квадрати.....	5
Заняття 4–6. Числові головоломки.....	12
Заняття 7–9. Математичні ребуси.....	16
Задачі на зважування і переливання	
Заняття 10–11. Терези без гирьок.....	27
Заняття 12–13. Терези з гирьками.....	31
Заняття 14–15. Переливання.....	34
Ігри	
Заняття 16–17. Відгадування задуманого числа.....	41
Заняття 18–19. Математичні фокуси.....	44
Заняття 20–23. Симетрія. Стратегії.....	47
Конструкції	
Заняття 24–25. Головоломокки із сірниками.....	52
Заняття 26–28. Задачі на розрізання фігур.....	58
Логічні задачі	
Заняття 29. Основні поняття логіки.....	63
Заняття 30–31. Логічні запитання. Логічні таблиці.....	71
Заняття 32–33. Задачі, що розв’язуються з кінця.....	75
Заняття 34–35. Софізми.....	80
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	83

Передмова

Одним із засобів зацікавлення учнів математикою є добре продумана позакласна робота. Кожний учитель прагне зацікавити учнів предметом, який він викладає, адже зацікавленість є запорукою успішного навчання. Недаремно видатний український математик М.В.Остроградський зазначав: «Зацікавити розум дитини – ось що є одним з основних положень нашої доктрини, і ми нічим не нехтуємо, щоб прищепити учневі смак, ми сказали, б навіть пристрасть до навчання». З цієї метою слід ширше використовувати варіативний компонент навчального плану.



Запропонований посібник містить авторські розробки – 35 занять до факультативного курсу «Математичний калейдоскоп» для учнів 5 класу (автор Гартфіль О.Р., програма схвалена для використання в загальноосвітніх навчальних закладах науково-методичною комісією НМР з питань освіти МОН України, протокол №4 від 24.06.2010).

Мета факультативного курсу – сформувати інтерес учнів до математики, розвивати математичні здібності учнів, формувати логіку та інтуїцію, просторову уяву, розширювати і поглиблювати знання з вивченого програмового матеріалу. Курс є доповненням шкільного підручника математики для 5 класу, пропедевтикою геометричних понять. Спрямований на формування й розвиток в учнів умінь розв’язувати одночасно стандартні і нестандартні текстові задачі, які мають логічний взаємозв’язок, бачення методу розв’язання нестандартних задач, підвищення рівня математичної підготовки учнів.

На кожному занятті факультативного курсу обов’язково розглядаються цікаві задачі та історичний матеріал з теми. Учні виступають з повідомленнями, захищають розв’язані індивідуально задачі. Під час проведення занять планується використовувати різні форми роботи з учнями. Це й індивідуальна робота, і робота в групах та парах, і фронтально-групова. Понятійний апарат, обчислювальні алгоритми, графічні уміння і навички, що мають бути сформовані на цьому етапі вивчення курсу, є тим підґрунтям, що забезпечить успішне вивчення в наступних класах алгебри і геометрії, а також інших навчальних предметів, таких як фізика, хімія, інформатика тощо, де застосовуються математичні знання, та для якісного проведення позакласних заходів: конкурсів, математичних змагань, математичних ігор, шкільних олімпіад, підвищення темпу проведення уроків математики.

Під час формування структури і логічного викладу змісту поданого матеріалу **ми врахували цілі і завдання вивчення курсу**, психолого-педагогічні вимоги щодо системності і послідовності його вивчення, доступності.

Розроблені заняття сприятимуть вирішенню найактуальнішої проблеми – всебічного розвитку дитини. Підібрані завдання своїм змістом зацікавлять учнів 5 класу, які хочуть навчитися розв’язувати задачі. Кожне заняття включає розвиваючі ігри, творчі завдання, логічні вправи, які стимулюють дітей до активної розумової діяльності, сприяють усвідомленню математичних закономірностей. Не обов’язково, щоб учень розв’язував нестандартну задачу самостійно, важливо створити таку ситуацію, щоб він подумав над нею, спробував її розв’язати, вибрав правильний спосіб.

Сподіваємось, що розв’язування поданих задач сприятиме розвитку пізнавальної, особистісної, комунікативної, самоосвітньої, соціальної, творчої та здоров’язберігаючої компетентностей учнів.

З повагою, автори

Матеріали для проведення занять курсу ОБЧИСЛЮВАЛЬНИЙ ПРАКТИКУМ ЗАНЯТТЯ 1–3

Тема. Магічні квадрати

Мета:

- ⇒ **формування предметних компетентностей:** ввести поняття магічного квадрата, познайомити з його властивостями, навчити будувати магічні квадрати розміром 3×3 ; відпрацьовувати вміння та навички складати та розв'язувати магічні квадрати;
- ⇒ **формування ключових компетентностей:** формувати вміння організовувати та планувати свою навчальну діяльність; формувати вміння виділяти головне в інформації; сприяти самовихованню толерантності, доброзичливості, принциповості;
- ⇒ **розвивати:** обчислювальні навички, логічне мислення, потребу звертатися до власного досвіду;
- ⇒ **виховувати:** старанність, спостережливість, культуру математичної мови і графічних записів.

*Математичні істини безсмертні,
несхильні до жевріння і залишаються
однаковими учора, сьогодні і вічно.*

Ерік Темпл Белл

ХІД ЗАНЯТТЯ

I. Організаційний момент.

Перевірити готовність учнів до заняття. Налаштувати їх на роботу. Провести вступну бесіду щодо структури курсу, що будемо вивчати.

II. Мотивація навчальної діяльності.

Сьогодні ми познайомимося з магічними квадратами. А розпочнемо заняття з висловлювання відомого шотландського математика Еріка Темпла Белла: «Математичні істини безсмертні, не схильні до жевріння і залишаються однаковими учора, сьогодні і вічно».

Насправді з покоління в покоління, починаючи з глибокої давнини, передаються знання з математики. Протягом 4000 років математика розвивалась як наука. Математичні методи проникли майже в усі розділи фізики, в хімію, а в останні десятиліття — в біологію, медицину, лінгвістику, економіку.

Сьогодні ви дізнаєтеся ще про одну сторону математики – магічну. Ви відкриєте для себе магічні квадрати, історію їх виникнення і розвитку, їх властивості, а також сфери застосування в житті людини.

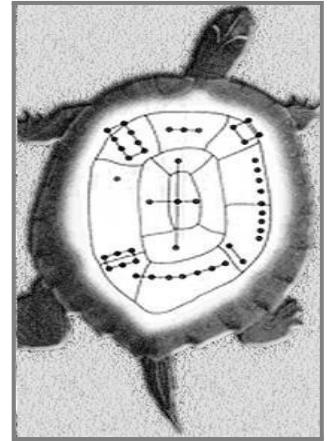
Священні, чарівні, загадкові, таємничі, досконалі... Як тільки їх не називали. «Я не знаю нічого прекраснішого в арифметиці, ніж ці числа, які дехто називає планетними, а дехто – *магічними*», – так писав про них видатний французький математик, один з авторів теорії чисел П'єр де Ферма. Ті, що притягують природною красою, наповнені внутрішньою гармонією, доступні, але як і раніше незбагненні, що приховують за уявною простотою безліч

таємниць. Знайомтеся – магичні квадрати – дивовижні представники уявного світу чисел.

III. Основна частина.

Історичні відомості.

Напевно, одними з перших відомих людству магичних фігур були магичні квадрати. Вони зустрічаються в культурі, історії, віруваннях і в різних містичних вченнях багатьох



6	32	3	34	35	1
7	11	27	28	8	30
19	14	16	15	23	24
18	20	22	21	17	13
25	29	10	9	26	12
36	5	33	4	2	31

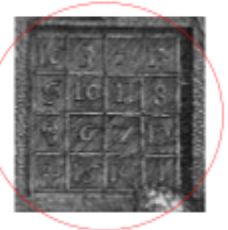
народів.

Країна, в якій був уперше придуманий магичний квадрат, точно невідома. Ймовірно, «найстарішим» з магичних квадратів, що дійшли до нас, є таблиця Ло-Шу (близько. 2200 р. до н. е.).

Згідно з легендою, під час володарювання імператора Ю (близько. 2200 до н.е.) з вод Хуанхе (Жовтої річки) впливла священна черепаха, на панцирі якої були накреслені таємничі ієрогліфи і ці знаки відомі під назвою Ло-Шу, що рівносились магичному квадрату.

Магічні, або чарівні, квадрати були відомі ще арабам та індусам. У Європі вони з'явилися у XV столітті завдяки візантійському письменнику Мосхопуло. Середньовічні астрологи (звїздарі) вірили в магичну силу цих квадратів, які, за їхніми переконаннями, могли слугувати оберегом проти чуми. Першим квадратом, що створили європейці, вважається квадрат А. Дюрера, що зображений на його відомій гравюрі «Меланхолія». Дата створення гравюри - 1514 рік – вказана числами, що стоять в двох центральних клітинах нижнього рядка. Говорять, що гравюра А. Дюрера стала поштовхом для знаменитих пророцтв його сучасника Мішеля Нострадамуса.

Магічні квадрати дуже поважали і приписували їм різні містичні властивості. Говорять, що якщо потрібно було зважитися на якусь небезпечну справу, їх з



магічними цілями малювали на папері і з'їдали. Таку ж страву пропонували як панацею від усіх хвороб. Існувало повір'я, що вигравіруваний на сріблі

магічний квадрат захищає від чуми. Навіть сьогодні серед атрибутів європейських віщунів можна побачити магічні квадрати.

Пізнавальні відомості.

Магічний, або чарівний квадрат — це квадратна таблиця, заповнена n^2 числами таким чином, що сума чисел в кожному рядку, кожному стовпці та на обох діагоналях однакова. Якщо в квадраті рівні суми чисел тільки в рядках і в стовпцях, то він називається напівмагічним. Нормальним називається магічний квадрат, заповнений цілими числами от 1 до n^2 .

Поля таблиці, в які записують числа, називаються *клітинами* магічного квадрата, а сума чисел, що стоять в будь-якому рядку, стовпці або на діагоналі, — його *постійною*.

Повного опису усіх можливих магічних квадратів не отримано і донині.

Відомо, що магічних квадратів 2×2 не існує. Магічних квадратів 3×3 — один — решта таких квадратів можна отримати з нього поворотами та симетріями. Розташувати натуральні числа від 1 до 9 в магічних квадратах 3×3 можна 8 різними способами. Магічних квадратів 4×4 вже більш як 800, а кількість магічних квадратів 5×5 близько чверті мільйона.

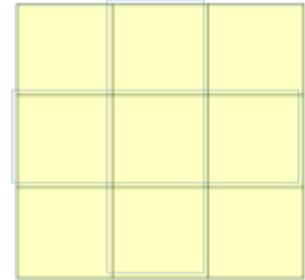
Магічні квадрати мають наступні властивості:

1. Якщо всі числа в клітинах магічного квадрата збільшити на одне й те саме число, то отримаємо магічний квадрат.

2. Якщо всі числа в клітинах магічного квадрата помножити на одне й те саме число, то також отримаємо магічний квадрат.

3. При відображенні відносно однієї з осей симетрії магічного квадрата отримаємо теж магічний квадрат.

4. При повороті навколо центра на кут 90° , 180° , 270° магічного квадрата, отримаємо магічний квадрат.



IV. Приклади розв'язування задач.

Задача 1. Розставте цифри, розташовані в квадратиках так, щоб суми чисел по будь-якій горизонталі, вертикалі та діагоналі (з кута в кут квадрата) були однакові.

1	1	1
2	2	2
3	3	3
3	1	2
1	2	3
2	3	1

*

Відповідь.

Задача 2. Колективне складання магічного квадрата.

Запишемо числа від 1 до 16 послідовно олівцем.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

* Поміняємо місцями числа, що стоять в протилежних кутах.

16	2	3	13
5	6	7	8
9	10	11	12
4	14	15	1

* Зробимо те ж саме з внутрішнім квадратом.

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

* Решту чисел обведемо олівцем.

* Перевіримо (сума цифр будь-якого стовпця, рядка та діагоналі дорівнює 34).

Задача 3. Самостійна робота.

Складіть магічні квадрати чисел 4 порядку.

1 варіант

Від 5 до 20

(2 учні виконують завдання на відкидних дошках, решта – самостійно)

20	6	7	17
9	15	14	12
13	11	10	16
8	18	19	5

50

2 варіант

від 10 до 25

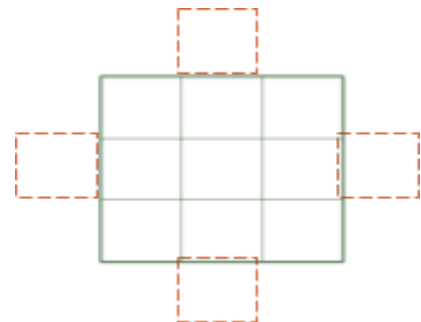
25	11	12	22
14	20	19	17
18	16	15	21
13	23	24	10

70

Старовинний прийом складання непарних магічних квадратів, тобто квадратів з будь-якою непарною кількістю клітинок: 3×3 , 5×5 , 7×7 тощо. Цей прийом був запропонований у XVII ст. французьким математиком Баше.

Накресліть квадрат, розграфлений на дев'ять клітинок, запишіть послідовно числа від 1 до 9, розташовуючи їх в косі ряди по три в ряд.

Числа, що стоять поза квадратом, вписуємо всередині так, щоб вони долучилися до протилежних сторін квадрата (залишаючись у тих же стовпцях або рядках, що і раніше). В результаті отримуємо квадрат.



		5	3					
8								2
	7			1		5		
4					5	3		
	1			7				6
		3	2					8
	6		5					9
		4						3
					9	7		

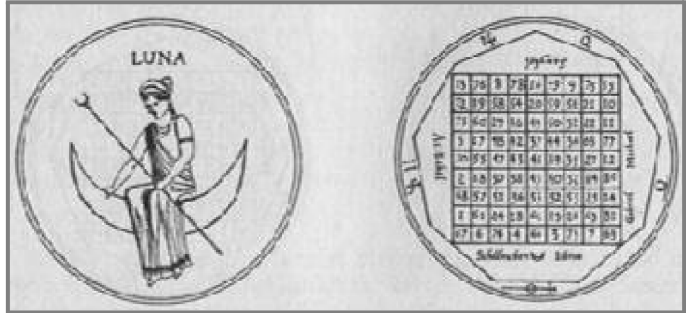
Сфера застосування магічних квадратів.

Традиційною сферою застосування магічних квадратів є талісмани. Приміром, талісман Місяця має певні властивості: оберігає від корабельних аварій і хвороб, робить людину люб'язною, сприяє відвертанню поганих намірів, зміцненню здоров'я.

Також сьогодні дуже популярна головоломка «судоку», прабатьком якої можна вважати Магічний квадрат. Багато хто вважає, що «судоку» є японською розвагою, але насправді Японія може вважатися лише батьківщиною назви.

За деякими даними розв'язування головоломок «судоку» покращує пам'ять, логіку мислення, а також перешкоджає розвитку, навіть лікує захворювання, пов'язані з головним мозком (такі, як хвороба Альцгеймера). Тому, вчені рекомендують щодня розв'язувати кросворди «судоку».

Останнім часом магічні квадрати – елементи прогресу нанотехнологій. Фірма «Toshiba», розробляючи якісні телевізійні екрани, дійшла висновку, що кольорні осередки вигідно компонувати за принципом магічних квадратів. В цьому випадку різко підвищується як чіткість зображень, так і кольорні переходи.



V. Відпрацювання навичок та вмінь. Розв'язування задач.

Задача 4. Числа 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 треба розташувати в 9 клітинках намальованого квадрата так, щоб суми чисел по будь-якій горизонталі, вертикалі та діагоналі були однаковими і складали щоразу число 18.

Відповідь.

5	10	3
4	6	8
9	2	7

Задача 5. Перемістіть цифри, розташовані в квадратиках, так, щоб суми чисел по будь-якій горизонталі, вертикалі та діагоналі великого квадрата були однаковими, але щоб на кожній з названих прямих не зустрічалися дві однакові цифри.

1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4
5	5	5	5	5

Відповідь.

3	2	4	5	1
4	1	2	3	5
1	3	5	4	2
5	4	1	2	3
2	5	3	1	4

VI. Підсумок заняття. Рефлексія.

VII. Домашнє завдання.

№ 1. Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 треба розташувати в 9 клітинках намальованого квадрата так, щоб суми чисел по будь-якій горизонталі, вертикалі та діагоналі були однаковими і складали щоразу число 15.

Відповідь.

2	7	6
9	5	1
4	3	8

№ 2. Знайдіть ще один варіант розташування цифр у квадраті до задачі 5, що розв'язували в класі.

Відповідь.

1	5	4	3	2
3	2	1	5	4
5	4	3	2	1
2	1	5	4	3
4	3	2	1	5

№ 5. Числа 3, 4, 5, 6, 8, 9 розставте в клітинах так, щоб в сумі отримати 21.

10		
	7	
	11	

Відповідь.

10	3	8
5	7	9
6	11	4

№ 6. В клітинах розставте числа 4, 6, 7, 9, 10, 11, 12 так, щоб у сумі отримати 24.

	8	
		5

Відповідь.

11	4	9
6	8	10
7	12	5

ЗАНЯТТЯ 4–6

Тема. Числові головоломки.

Мета:

формування предметних компетентностей: формувати вміння та навички учнів розв'язувати числові головоломки та головоломки-жарти;

формування ключових компетентностей: формувати вміння аналізувати, генерувати нові ідеї; переконаність, що успіх команди – це й особистий успіх; сприяти самовихованню чесності, відповідальності;

розвивати: обчислювальні навички, логічне мислення;

виховувати: старанність, дисциплінованість, спостережливість, культуру математичної мови і графічних записів.

Справжня математика – найменш суха з усіх наук, вона відкриває широке поле для творчої фантазії та спекулятивних поглядів; сухість предмета залежить, так би мовити, від гілок, якими по світовому дереву підіймаються та спускаються.

С. В. Ковалевська

ХІД ЗАНЯТТЯ

I. Організаційний момент.

Перевірити готовність учнів до заняття. Налаштувати їх на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання.

Перевірити якість виконання завдання. Відповісти на питання, які виникли під час виконання завдань.

III. Основна частина. Відпрацювання навичок та вмінь. Розв'язування задач.

Задача 1. Скільки горобців залишилося?

На дереві сиділо 6 горобців. Стрілець, вистрілив і попав у два з них. Скільки горобців залишилось на дереві.

Відповідь. На дереві не залишилось жодного горобця, бо всі інші полетіли.



Задача 2. Скільки разів можна від 100 відняти 10?

Відповідь. 1 раз. Тому що $100 - 10 = 90$ і потім потрібно буде віднімати уже від 90, а не від 100.

Задача 3. Про вовка, козу і капусту.

Селянину потрібно перевезти через річку вовка, козу і капусту. Та човен такий, що в ньому може поміститися тільки селянин, а з ним або тільки вовк, або тільки коза, або тільки капуста.

Але якщо залишити вовка з козою, то вовк з'їсть козу, а якщо залишити козу з капустою, то коза з'їсть капусту. Як селянину перевезти свій вантаж?

Відповідь. Зрозуміло, що потрібно почати з кози. Селянин, перевізши козу, повертається на берег до вовка, якого перевозить на інший берег, де його і залишає. Потім знову бере козу і везе її на інший берег. Далі він знову залишає козу і перевозить до вовка капусту. Потім, повернувшись, він перевозить козу, і переправа завершується без пригод.



Задача 4. Скільки кішок?



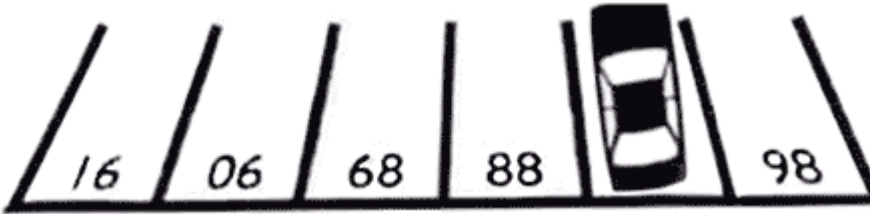
В кімнаті чотири кутки. В кожному кутку сидить кішка. Навпроти кожної кішки по три кішки. На хвості кожної кішки по одній кішці. Скільки всього кішок в кімнаті?

Відповідь. В кімнаті всього лише чотири кішки.

Задача 5. Тестова задача, яку задають в початковій школі Гонконгу.

Визначити номер місця для паркування, яке зайняла машина.

(Ця задача задається першокласникам. Відповісти потрібно за 20 секунд).



Відповідь. 87. Спробуйте повернути картинку на 180 градусів.

Задача 6. Який знак потрібно поставити?

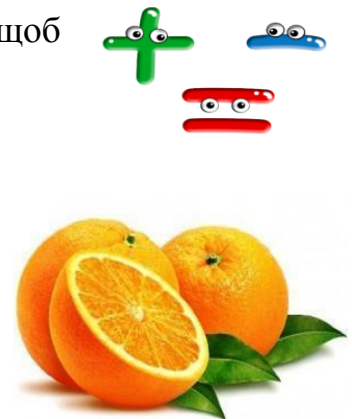
Який знак потрібно поставити між цифрами 2 і 3, щоб результат був більше ніж 2, але менше ніж 3?

Відповідь. Потрібно поставити кому.

Задача 7. 10 помаранчів.

Розділіть 10 помаранчів порівну між 12 хлопчиками за умови, що різати кожен помаранч можна не більше, ніж на 3 рівні частини.

Відповідь. 6 помаранчів ріжемо пополам, а 4 — на 3 рівні частини, після чого даємо кожному хлопчику по половині і одній третині помаранча.



Задача 8. Скільки яєць знесуть кури?

Півтори курки за півтора дня знесуть півтора яйця. Скільки яєць знесуть 3 курки за 4 дні?

Відповідь. 8 яєць.

Задача 9. Яка маса щуки?

Щука важить стільки, скільки важить кілограм і пів щуки. Яка вага щуки?

Відповідь. 2 кг.

**Задача 10. Стадо биків.**

Пастух вів 70 биків. Його запитали: «Яку частину свого численного стада ти ведеш?». Він відповів: «Я веду дві третини від третини всієї худоби». Скільки биків було у стаді?

Вказівка. Позначимо кількість худоби через x голів. Тоді за умовою задачі

$$\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot x \right) = 70$$

отримаємо рівність:

Розв'язавши рівняння, отримаємо – 315 биків.

Відповідь. 315 биків.

Задача 11. 3 Бахшалійського рукопису.

3 чотирьох надавачів милостині другий дав в два рази більше, ніж перший, третій – в три рази більше, ніж другий, четвертий – вчетверо більше, ніж третій, а всі разом дали 132. Скільки милостині дав перший?

Вказівка. Нехай перший дав x . Тоді другий – $2x$, третій – $3 \cdot (2x)$, четвертий

– $4 \cdot (3 \cdot (2x))$. Разом вони пожертвували: $x + 2x + 3 \cdot (2x) + 4 \cdot (3 \cdot (2x)) = 132$. Розв'язавши рівняння знаходимо, що перший дав 4.

Відповідь. 4.

Задача 12. Собака і кролик.

Собака женеться за кроликом, що знаходиться за 150 футів від неї. Собака робить стрибок на 9 футів, а кролик на 7 футів. Скільки стрибків повинна зробити собака, щоб наздогнати кролика?

Вказівка. З кожним стрибком собака наближається до кролика на $9 - 7 = 2$ (футів). Тому, щоб подолати відстань в 150 футів, собаці потрібно зробити $150 : 2$ стрибків. Отже, 75 стрибків.

Відповідь. 75 стрибків.



Задача 13. Дідусь та онука.

Дідусеві стільки ж років, скільки місяців онучці. Дідусеві з онукою разом 91 рік. Скільки років дідусеві і скільки онучці?

Вказівка. Нехай онучці x місяців, тоді дідусеві x років, тоді $x/12 + x = 91$; $13x = 91 \cdot 12$; $x = 84$.

Відповідь. Дідусеві – 84 роки, онучці – 7 років.

**Задача 14. Собака і два мандрівники.**

Два мандрівники ідуть по одній і тій же дорозі в одному і тому ж напрямку. Перший знаходиться на 8 км попереду від другого і йде зі швидкістю 4 км/год, другий рухається зі швидкістю 6 км/год. У одного з мандрівників є собака, яка саме в той момент, коли ми почали спостерігати за ними, побігла від свого господаря до іншого мандрівника (її швидкість 15 км/год). Потім повернулася до господаря і знову побігла до іншого мандрівника. Так вона бігала від одного до другого до тих пір, поки мандрівники не зустрілись. Потрібно визначити, який шлях пробігла собака.



Вказівка. Відповідь не залежить від того, кому з мандрівників, першому або другому, належить собака. Другий мандрівник наздожене першого через 4 год, і за цей час собака пробіжить $4 \cdot 15 = 60$ (км).

Відповідь. 60 км.

IV. Підсумок заняття. Рефлексія.**V. Домашнє завдання.**

1. Як можна одним мішком пшениці, змоловши її, наповнити два мішки, розміри яких такі ж, як і мішка, в якому знаходиться пшениця?

(Помістити один мішок в інший)

2. Два батьки і два сини з'їли за сніданком три яйця, причому кожному з них дісталось по цілому яйцю. Як це могло статися?

(Це було троє осіб: дід, батько і син)

3. Дві бабці вирушили з Броварів до Києво-Печерської лаври. Обидві вони пройшли 60 верств. Скільки верств пройшла кожна з них, якщо йшли вони з однаковою швидкістю? *(Кожна пройшла 60 верств)*

4. Скільки кінців у чотирьох палок? У п'яти палок? А у п'яти з половиною? *(8, 10, 12)*

5. Як від двадцяти відняти 88 так, щоб залишилось 22? *($XX - 88 = 22$)*

6. Які числа більші від ста при читанні не змінюються від їх перевертання? *(609, 888, 6969, 69869, ...)*

7. Число 66 вмить збільшіть на половину цього числа. *(Перевернути число, отримаємо 99)*

8. Число 666 вміть збільшити у півтора рази. (*Перевернути число, отримаємо 999*)

9. Розділіть число 188 на дві рівні частини, щоб у кожній з них отримали сто. (*188*)

10. Розділіть на аркуші паперу число дванадцять на дві рівні частини так, щоб половина цього числа була сім. (*ЖН*)



ЗАНЯТТЯ 7–9

Тема. Математичні ребуси.

Мета:

- ⇒ **формування предметних компетентностей:** ввести поняття ребуса, видів ребусів і способів їх складання та розгадування;
- ⇒ **формування ключових компетентностей:** формувати вміння діяти за алгоритмом та складати алгоритми, визначати достатність даних для розв'язування задачі; сприяти розумінню важливості чітких та лаконічних формулювань; сприяти самовихованню наполегливості, працездатності;
- ⇒ **розвивати:** обчислювальні навички, логічне та просторове мислення;
виховувати: старанність, спостережливість, працьовитість, культуру математичної мови і графічних записів.

Жодна людина ще не навчилася думати, читаючи в готовому виді записані думки іншої людини. Навчитися думати можна, лише міркуючи самотійно.

Міхай Емінеску

ХІД ЗАНЯТТЯ

I. Організаційний момент.

Перевірити готовність учнів до заняття. Налаштувати їх на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання.

Перевірити якість виконання завдання. Відповісти на питання, які виникли під час виконання завдань.

III. Основна частина.

Ребус – загадка-жарт, у якій слово або фраза, що розгадуються, зображені у вигляді малюнків, поєднаних з літерами, цифрами, нотами та іншими знаками.



Слово «ребус» латинського походження (лат. rebus, за допомогою речей, «Nonverbissedrebus» – «Не словами, а за допомогою речей»). Зародився ребус у Франції в XV столітті, а перший друкований збірник ребусів був виданий у Франції в 1582 році, складений він був Етьєном Табуро.

Ребус – одна з найпопулярніших та поширених ігор. Ребуси дуже корисні для розвитку мислення дітей, розвитку кмітливості та логіки. Це гарне дитяче захоплення, що приносить дитині користь і задоволення.

IV. Розгадування ребусів, пов'язаних з математичною термінологією.

Ребус 1



Ребус 2



Ребус 3



Ребус 4



Ребус 5



Ребус 6 (2 варианты)





1 = Г

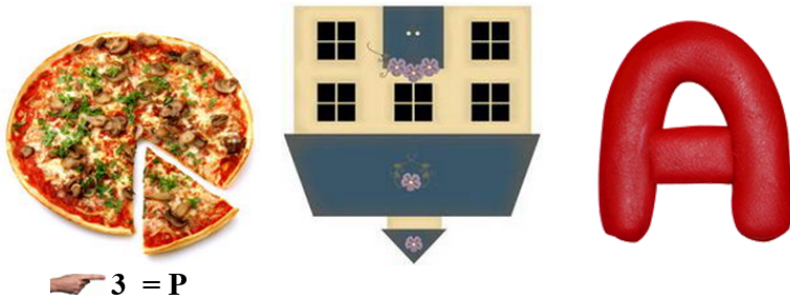
Ребус 7 (2 варианты)



Ребус 8 (2 варианты)



Ребус 9



Ребус 10



Ребус 11



Ребус 12 (2 варианты)



Ребус 13



Ребус 14



Ребус 15



Ребус 16



Ребус 17



Ребус 18



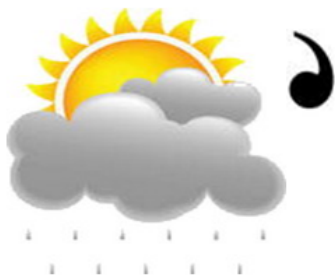
Ребус 19



Ребус 20



Ребус 21 (2 варианты)



Ребус 22



Ребус 23



Ребус 24



Ребус 25



Ребус 26



Ребус 27



Ребус 28



Ребус 29



Ребус 30 (2 варианты)

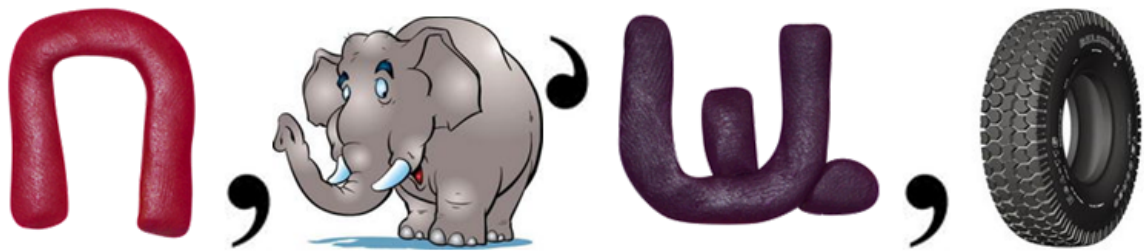




Ребус 31



Ребус 32

**Відповіді.**

1.	Ар	9.	Піраміда	17.	Градус	25.	Круг
2.	Поверхня	10.	Паралелепіпед	18.	Ділене	26.	Радіус
3.	Бісектриса	11.	Від'ємник	19.	Ділення	27.	Діаметр
4.	Кут	12.	Віднімання	20.	Дільник	28.	Сфера
5.	Ламана	13.	Відрізок	21.	Добуток	29.	Куля
6.	Грань	14.	Відсоток	22.	Додавання	30.	Висота
7.	Вершина	15.	Процент	23.	Доданок	31.	Основа
8.	Многокутник	16.	Гектар	24.	Коло	32.	Площина

V. Розгадування математичних ребусів.

Задача 1. Від одного до дев'яти

Замініть зірочки цифрами від 1 до 9. Кожна цифра використовується тільки один раз.

$$\begin{array}{r} \times \quad * \quad * \\ \quad \quad * \\ \hline + \quad * \quad * \\ \quad \quad * \quad * \\ \hline \quad * \quad * \end{array}$$

Відповідь.

$$\begin{array}{r} \times \quad 1 \quad 7 \\ \quad \quad 4 \\ \hline + \quad 6 \quad 8 \\ \quad \quad 2 \quad 5 \\ \hline \quad 9 \quad 3 \end{array}$$

Задача 2. По дві цифри

Замініть зірочки цифрами від 1 до 9. Кожна цифра використовується двічі.

$$\begin{array}{r} \times \quad * \quad * \quad * \\ \quad \quad * \quad * \quad * \\ \hline + \quad * \quad * \quad * \\ \quad \quad * \quad * \quad * \\ \hline * \quad * \quad * \quad * \quad * \end{array}$$

Відповідь.

$$\begin{array}{r} \times \quad 1 \quad 7 \quad 9 \\ \quad \quad 2 \quad 2 \quad 4 \\ \hline + \quad 7 \quad 1 \quad 6 \\ \quad \quad 3 \quad 5 \quad 8 \\ \hline 4 \quad 0 \quad 0 \quad 9 \quad 6 \end{array}$$

Задача 3. П'ять одиниць

Запишіть число 100, використовуючи п'ять одиниць і знак «—».

Відповідь. $111 - 11 = 100$.**Задача 4. П'ять двійок**

Запишіть число 28, використовуючи п'ять двійок і тільки знак «+».

Відповідь. $22 + 2 + 2 + 2 = 28$.**Задача 5. П'ять трійок**

Запишіть число 5, використовуючи п'ять трійок і знаки дій.

Відповідь. $3 + 3 : 3 + 3 : 3 = 5$.**Задача 6. П'ять четвірок**

Запишіть число 5, використовуючи п'ять четвірок і знаки дій.

Відповідь. $4 + (4 : 4)^{44} = 5$.**Задача 7. П'ять п'ятірок**

Запишіть число 5, використовуючи п'ять п'ятірок і знаки дій.

Відповідь. $5 + (5 - 5) \cdot (5 + 5) = 5$.**Задача 8. П'ять шісток**

Запишіть число 5, використовуючи п'ять шісток і знаки дій.

Відповідь. $6 - (6 : 6)^{66} = 5$.**Задача 9. Чотири сімки**

Запишіть число 5, використовуючи чотири сімки і знаки дій.

Відповідь. $7 - (7 + 7) : 7 = 5$.**Задача 10. П'ять вісімок**

Запишіть число 5, використовуючи п'ять вісімок і знаки дій.

Відповідь. $(88 - 8) : (8 + 8) = 5$.**Задача 11. П'ять дев'яток**

Запишіть число 5, використовуючи п'ять дев'яток і знаки дій.

Відповідь. $(99 - 9) : (9 + 9) = 5$.

Задача 12. Сім дев'яток

Сім дев'яток виписали підряд: 9 9 9 9 9 9 9. Поставте між деякими з них знаки «+» або «—», щоб отриманий вираз дорівнював 1989.

Відповідь. $999 + 999 - 9 = 1989$.

Задача 13. Музичний ребус

Замініть букви цифрами так, щоб отримати вірні рівності:

$$RE + MI = FA$$

$$DO + SI = MI$$

$$LA + SI = SOL$$

Відповідь. $27 + 56 = 83$

$$40 + 16 = 56$$

$$93 + 16 = 109.$$

**Задача 14. Відновіть справедливість**

Відновіть справедливість і замініть букви цифрами так, щоб приклад став вірним. Однаковим буквам відповідають однакові цифри, різним – різні.

$$TWO \cdot TWO = THREE.$$

Відповідь. $138 \cdot 138 = 19044$.

VI. Підсумок заняття. Рефлексія.**VII. Домашнє завдання.**

№ 1. Використовуючи цифру 4 чотири рази і арифметичні дії, запиши число 5.

Відповідь. $(4 + 4 \times 4) : 4 = 5$.

№ 2. Використовуючи за потреби дії додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до степеня та дужки, запишіть числа від 1 до 4, використовуючи:

1) п'ять разів цифру 2.

Відповідь. $(2 : 2) \cdot (2 : 2)^2 = 1;$

$$(2 : 2) + (2 : 2)^2 = 2;$$

$$2 + (2 : 2) \cdot (2 : 2) = 3;$$

$$(2 + 2) \cdot (2 : 2)^2 = 4.$$

2) п'ять разів цифру 3.

Відповідь. $(3 : 3)^{333} = 1;$

$$(3 - 3 : 3) \cdot (3 : 3) = 2;$$

$$3 \cdot (3 : 3) \cdot (3 : 3) = 3;$$

$$(3 + 3 : 3) \cdot (3 : 3) = 4.$$

3) п'ять разів цифру 4.

Відповідь. $(4 : 4)^{444} = 1;$

$$(4 : 4)^4 + (4 : 4) = 2;$$

$$4 - (4 : 4)^{44} = 3;$$

$$4 \cdot (4 : 4)^{44} = 4.$$

4) п'ять разів цифру 5.

Відповідь. $5 : 5 + (5 - 5) \cdot 5 = 1;$

$$(5 + 5) : 5 + 5 - 5 = 2;$$

$$(5 \cdot 5 - 5 - 5) : 5 = 3;$$

$$5 - 5 : 5 + 5 - 5 = 4.$$



5) п'ять разів цифру 6.

Відповідь. $(6 : 6)^{666} = 1$;
 $[(66 + 6) : 6] : 6 = 2$;
 $6 : 6 + (6 + 6) : 6 = 3$;
 $(6 + 6 + 6 + 6) : 6 = 4$.

6) чотири рази цифру 7.

Відповідь. $7 : 7 + 7 - 7 = 1$;
 $7 : 7 + 7 : 7 = 2$;
 $(7 + 7 + 7) : 7 = 3$;
 $77 : 7 - 7 = 4$.

7) п'ять разів цифру 8.

Відповідь. $(88 : 88)^8 = 1$;
 $(8 : 8) + (8 : 8)^8 = 2$;
 $(88 - 8 \cdot 8) : 8 = 3$;
 $(8 + 8 + 8 + 8) : 8 = 4$.

8) п'ять разів цифру 9.

Відповідь. $(99 : 99)^9 = 1$;
 $(9 : 9) + (9 : 9)^9 = 2$;
 $(99 + 9) : 9 - 9 = 3$;
 $(9 + 9 + 9 + 9) : 9 = 4$.

№ 3. Замініть букви цифрами так, щоб отримати вірний приклад на множення. Кожній букві відповідає тільки одна цифра. Різним буквам не можуть відповідати однакові цифри.

$$\begin{array}{r} \times ABCI \text{ Відповідь.} \\ \hline EDCE \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times 21978 \\ \hline 87912 \end{array}$$

№ 4. У прикладі на додавання:

$$\square + \square + \bigcirc\bigcirc = \triangle\triangle\triangle$$

різні фігурки замінюють різні цифри. Яку цифру замінює квадратик?

Розв'язання. Максимальне значення суми трьох доданків дорівнює $9 + 9 + 99 = 117$.

Отже, $\triangle\triangle\triangle = 111$. Мінімальне значення числа $\bigcirc\bigcirc$ дорівнює $111 - 9 - 9 = 93$, а саме число дорівнює 99.

Квадратик замінює число $6 : (111 - 99) : 2 = 6$.

Відповідь. Квадрат замінює число 6.



ЗАДАЧІ НА ЗВАЖУВАННЯ І ПЕРЕЛИВАННЯ ЗАНЯТТЯ 10–11

Тема. Терези без гирьок.

Мета:

- ⇒ **формування предметних компетентностей:** формувати вміння та навички учнів розв'язувати задачі на зважування без гир;
- ⇒ **формування ключових компетентностей:** формувати вміння використовувати критерії раціональності з метою вибору найкращого розв'язання; формувати вміння виділяти головне в інформації; сприяти самовихованню толерантності, відповідальності;
- ⇒ **розвивати:** обчислювальні навички, логічне та просторове мислення;
виховувати: старанність, спостережливість, культуру математичної мови і графічних записів.

Жодна людина ще не навчилася думати, читаючи в готовому виді записані думки іншої людини. Навчитися думати можна, лише міркуючи самотійно.

Міхай Емінеску

ХІД ЗАНЯТТЯ

I. Організаційний момент.

Перевірити готовність учнів до заняття. Налаштувати їх на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання.

Перевірити якість виконання завдання. Відповісти на питання, які виникли під час виконання завдань.

III. Основна частина.

Задачі на зважування дуже відрізняються від звичайних шкільних задач, які ви звикли розв'язувати на уроці. Щоб розв'язати таку задачу, необхідно уявити відповідну ситуацію і проаналізувати всі можливі варіанти. Розв'язати таку задачу – означає описати певні дії і зроблені з них висновки.



В задачах на зважування часто йде мова про терези без гир. Ними можна порівнювати предмети (важчий, легший, однакові), але не можна виміряти точну їх вагу. Розглянемо кілька таких задач.

IV. Відпрацювання навичок та вмінь. Розв'язування задач.

Задача 1. Серед трьох монет одна фальшива (легша від двох інших, однакових за вагою). За допомогою одного зважування на терезах без гир виділити фальшиву монету.



Розв'язання. Одну монету покладемо на одну шальку терезів, а другу – на іншу шальку. Якщо терези зрівноважаться, то третя монета – фальшива. Якщо не зрівноважаться, то фальшива монета лежить на тій шальці, яка піднялася догори.

Задача 2. У Буратіно є 27 золотих монет. Але відомо, що Кіт Базилю замінив одну монету на фальшиву, і вона повазі важча від справжніх. Як за три зважування на чашкових терезах без гир Буратіно знайти фальшиву монету?

Розв'язання. Розділимо монети на 3 купки по 9 монет. Покладемо на чаші терезів першу і другу купки; в результаті цього зважування ми точно дізнаємось, в якій з купок знаходиться фальшивка (якщо ваги зрівноважаться, то вона – в третій купці). Тепер, аналогічно, розділимо вибрану купку на три частини по три монети, покладемо на ваги дві з цих частин і визначимо, в якій з частин знаходиться фальшива монета. Нарешті, залишається з трьох монет визначити важчу: кладемо на чаші терезів по 1 монеті – фальшивою є важча; якщо ж терези зрівноважені, то фальшивою є третя монета.



Задача 3. Є 5 монет, серед яких одна фальшива (невідомо, легша вона чи важча від справжньої). Маса справжньої монети 5 г. Як за допомогою двох зважувань на терезах можна визначити фальшиву монету, маючи одну гирю масою 5 г?

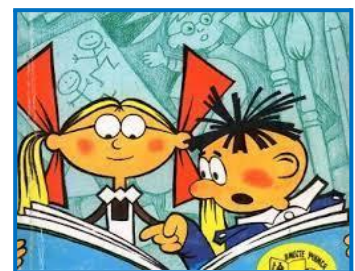
Розв'язання. Позначимо монети №1, №2, №3, №4 і №5. Покладемо монети №1 і №2 на одну шальку, а монету №3 з гиркою – на другу. Якщо шальки зрівноважені, то фальшива монета знаходиться серед відкладених (№4 або №5). За друге зважування на одну шальку покладемо монету №4, а на другу – гирю. Якщо терези зрівноважені, то фальшивою є монета №5; якщо не зрівноважені, то фальшивою є монета №4.

Якщо при першому зважуванні шальки не зрівноважені, то можливі два випадки:

1) переважає шалька з монетами №1 і №2 – тоді фальшива монета або №1 чи №2 (тоді вона важча від справжньої), або №3 (тоді вона легша від справжньої). Відкладені монети №4 і №5 – справжні. Для другого зважування на одну шальку покладемо монети №1 і №3, а на іншу – №4 і №5. Якщо переважать №1 і №3, то фальшива – №1, якщо переважать №4 і №5, то фальшива – №3, якщо вони зрівноважаться, то фальшива – №2;

2) переважає шалька з монетою №3 і гирею – тоді фальшива монета або №1 чи №2 (тоді вона легша), або №3 (тоді вона важча); при другому зважуванні фальшивою буде монета №3, якщо переважає шалька з монетами №1 і №3; фальшивою буде монета №1, якщо переважають №4 і №5; фальшивою буде – №2, якщо №1 і №3 зрівноважені монетами №4 і №5.

Задача 4. Є 9 монет, серед яких одна фальшива (невідомо, легша вона чи важча від справжньої). Як за допомогою трьох зважувань на терезах без гир виділити фальшиву монету?



Розв'язання. Розділимо монети на три купки по три монети в кожній. Якщо монети №1, №2 і №3 зрівноважені монетами №4, №5 і №6, то вони справжні, а фальшива – серед монет №7, №8 і №9. Для другого зважування на одну шальку покладемо справжні монети (наприклад №1, №2 і №3), а на другу – монети №7, №8 і №9. Якщо переважають справжні монети, то фальшива – легша, якщо переважають монети №7, №8 і №9, то фальшива – важча. При третьому зважуванні легко визначити фальшиву монету.

Якщо монети №1, №2 і №3 переважають монети №4, №5 і №6, то монети №7, №8 і №9 – справжні. Для другого зважування на одну шальку покладемо монети №1, №2 і №3, а на другу – №7, №8 і №9. Якщо монети не зрівноважені, то фальшива – серед монет №1, №2 і №3, причому вона важча, якщо №1, №2 і №3 переважають – і легша, якщо переважають монети №7, №8 і №9. Якщо при другому зважуванні №1, №2 і №3 зрівноважать групу монет №7, №8 і №9, то фальшива монета серед монет №4, №5 і №6, причому вона легша, якщо при першому зважуванні монети №1, №2 і №3 переважили монети №4, №5 і №6, і важча, якщо при першому зважуванні монети №4, №5 і №6 переважили монети №1, №2 і №3. Таким чином, після другого зважування ми визначили трійку монет, серед яких є фальшива, і знаємо важча вона чи легша. При третьому зважуванні визначимо фальшиву монету.

Задача 5. Є сім зовні однакових монет, серед яких п'ять справжніх (усі однакової маси) і дві фальшиві (однакової маси, але легші за справжні). Як за допомогою двох зважувань на шалькових терезах без гир виділити три справжні монети?

Розв'язання. Занумеруємо монети числами 1, 2, 3, ..., 7. Першим зважуванням порівнюємо монети 1, 2, 3 з монетами 4, 5, 6. Якщо маси рівні, то в кожній трійці по одній фальшивій монеті, а монета 7 справжня. Тоді наступним зважуванням порівнюємо монети 1 і 2. Якщо їхня маса однакова, то вони справжні, а якщо ж ні, то важча з монет 1 або 2, монета 3 і монета 7 – справжні. Якщо під час першого – початкового – зважування переважила одна з груп, то всі її монети справжні.

Задача 6. Є 40 зовні однакових монет, серед яких 2 фальшиві, причому вони легші від справжніх і важать однаково. Як за допомогою двох зважувань на шалькових терезах без гир відібрати 20 справжніх монет?

Розв'язання. Розіб'ємо монети на три купки: А, В і С, що містять по 10, 10 і 20 монет відповідно. Перше зважування: порівнюємо вагу купок А і В. Можливі два випадки. Якщо $A = B$, то порівнюємо вагу $A + B$ і С. Якщо $A > B$ (другий випадок аналогічний), то розіб'ємо С на дві купки по 10 монет і порівнюємо їхню вагу.

Задача 7. Серед 101 однакових за виглядом монет одна фальшива, така, що відрізняється за вагою. Як за допомогою шалькових терезів без гир за два зважування визначити, легшою або важчою є фальшива монета? Знаходити її не потрібно.

Розв'язання. Зважуємо 50 і 50 монет, можуть бути два випадки.

1 випадок. Монети мають однакову вагу. Беремо монету, що залишилася, і ставимо її в ліву купку замість однієї з тих, що є там:

а) ліва купка важча => фальшива монета важча;

б) ліва купка легша => фальшива монета легша.

2 випадок. Монети мають різну вагу. Беремо важчу купку і розбиваємо її на дві купки по 25 монет:

а) вага купок однакова => фальшива монета легша;

б) вага купок неоднакова => фальшива монета важча.

Задача 8. Є 8 монет. Одна з них фальшива і легша за справжню монету. Визначить за 3 зважування яка з монет фальшива.

Розв'язання. Ділимо монети на дві рівні купки – по 4 монети в кожній. Зважуємо. Ту купку, яка легша, знову ділимо на дві однакові купки – тепер по дві монети в кожній. Зважуємо. Визначаємо, яка з них легша. Кладемо на шальки терезів по 1 монеті з цієї купки. Фальшива та, яка легша.

V. Підсумок заняття. Рефлексія.

VI. Домашнє завдання.

1. Маємо чотири камінці різної маси. За яку найменшу кількість зважувань на терезах без гир можна знайти найважчий і найлегший камінь?

№ 2. Маємо чотири пакети різної маси і правильні шалькових терези без гир. Як за п'ять зважувань розкласти пакети в порядку зростання їх маси?

№ 3. З 21 монети 10 справжніх і 11 фальшивих, причому кожна фальшива на 1 г легша за справжню. Взяли одну з монет, як за одне зважування на терезах зі стрілкою визначити чи фальшива монета?

№ 4. Маємо 6 однакових за виглядом монет, чотири з них справжні, по 4 г кожна, а дві — фальшиві: вагою 5 г і 3 г. За чотири зважування на шалькових терезах без гир знайдіть обидві фальшиві монети.

№ 5. Серед 18 монет одна фальшива, причому фальшива відрізняється за масою від справжніх. За яку найменшу кількість зважувань на правильних шалькових терезах без гир можна визначити легша чи важча від справжніх фальшива монета?

№ 6. Як зважити вантаж на шалькових терезах з гирями, якщо гирі правильні, а терези не правильні.

ЗАНЯТТЯ 12–13

Тема. Терези з гирьками.

Мета:

формування предметних компетентностей: відпрацьовувати навички розв'язування задач на зважування за допомогою терезів з гирьками;

формування ключових компетентностей: формувати розуміння важливості чітких та лаконічних формулювань, вміння виділяти головне в інформації; сприяти самовихованню толерантності, доброзичливості, принциповості;

розвивати: обчислювальні навички, логічне та просторове мислення;

виховувати: старанність, спостережливість, культуру математичної мови і графічних записів.

ХІД ЗАНЯТТЯ

I. Організаційний момент.

Перевірити готовність учнів до заняття. Налаштувати їх на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання.

Перевірити якість виконання завдання. Відповісти на питання, які виникли під час виконання завдань.

III. Основна частина. Відпрацювання навичок та вмінь. Розв'язування задач.



Задача 1. На одній шальці терезів лежить цеглина, а на другій – половина такої самої цеглини і ще дві гирі: 1 кг і 500 г. Терези зрівноважені. Потрібно знайти масу цеглини.

Розв'язання. Якщо з обох шальок терезів зняти по половині цеглини, то терези залишаться зрівноваженими. Тоді гирі 1 кг і 500 г врівноважують другу половину цеглини. Отже, вся цеглина важить в 2 рази більше, тобто 3 кг.

Відповідь. 3 кг.

Задача 2. У пакеті 3 кг 600 г крупи. Є шалькові терези і гиря 200 г. Як поділити крупу на три пакети: 800 г, 800 г і 2 кг – за допомогою трьох зважувань?

Розв'язання. Перше зважування: 1800 г і 1800 г. Друге зважування: зважимо 200 г за допомогою гирі й відсиплемо їх в пакет масою 1800 г – одержимо в одному пакеті 2 кг. Третє зважування: розважимо пакет масою 1600 г навпіл по 800 г.

Задача 3. У пакеті 9 кг крупи. За допомогою терезів з гирями 50 г і 200 г треба розкласти цю крупу у два пакети: в один – 2 кг, в другий – 5 кг. Спробуйте це зробити за три зважування.



Розв'язання. Перше зважування: розділимо 9 кг у два пакети по 4500 г, розваживши крупу порівну на обох шальках терезів.

Друге зважування: один із пакетів розважимо пополам в два пакети по 2250 г у кожному.

Третє зважування: із пакета масою 2250 г відсиплемо 250 г, зваживши їх за допомогою гир. В пакеті залишиться 2 кг крупи.

Відважимо 5 кг таким способом: перше зважування – 4500 г і 4500 г; друге зважування: відважимо 250 г з одного пакета і всиплемо їх в другий, одержимо 4250 г і 4750 г; третє зважування – із пакета масою 4250 г відважимо 250 г і знову висиплемо в інший пакет, в ньому одержимо 5 кг крупи.

Задача 4. Є 5 монет, серед яких одна фальшива (невідомо, легша вона чи важча від справжньої). Маса справжньої монети 5 г. Як за допомогою двох зважувань на терезах можна визначити фальшиву монету, маючи одну гирю масою 5 г?

Розв'язання. Позначимо монети №1, №2, №3, №4 і №5. Покладемо монети №1 і №2 на одну шальку, а монету №3 з гиркою – на другу. Якщо шальки зрівноважені, то фальшива знаходиться серед відкладених (№4 або №5). За друге зважування на одну шальку покладемо монету №4, а на другу – гирю. Якщо терези зрівноважені, то фальшивою є монета №5; якщо не зрівноважені, то фальшивою є монета №4. Якщо при першому зважуванні шальки не зрівноважені, то можливі два випадки:

1) переважає шалька з монетами №1 і №2 – тоді фальшива монета або №1 чи №2 (тоді вона важча від справжньої), або №3 (тоді вона легша від справжньої). Відкладені монети №4 і №5 – справжні. Для другого зважування на одну шальку покладемо монети №1 і №3, а на іншу – №4 і №5. Якщо переважать №1 і №3, то фальшива – №1, якщо переважать №4 і №5, то фальшива – №3, якщо вони зрівноважаться, то фальшива – №2;

2) переважає шалька з монетою №3 і гирею – тоді фальшива монета або №1 чи №2 (тоді вона легша), або №3 (тоді вона важча); при другому зважуванні фальшивою буде монета №3, якщо переважає шалька з монетами №1 і №3; фальшивою буде монета №1, якщо переважають №4 і №5; фальшивою буде – №2, якщо №1 і №3 зрівноважені монетами №4 і №5.

Задача 5. На столі лежить 10 пронумерованих капелюхів. У кожному капелюсі лежить по 10 золотих монет. В одному з капелюхів фальшиві монети. Справжня монета важить 10 г, а фальшива 9 г. У допомогу надані ваги зі шкалою в грамах. Як визначити в якому з капелюхів знаходяться фальшиві монети, використовуючи терези тільки для одного зважування? Терези можуть зважувати не більше 750 г.

Розв'язання. З першого капелюха беремо одну монету, з другого – дві, з третього – три і т.д. зважуємо відібрані монети. Якби всі монети були справжніми, то вага була б: $10 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10)$. Разом 550 грамів. Але кілька монет є фальшивими, а скільки легко



дізнатись. Потрібно від 550 відняти ту вагу яку ми отримали насправді. Ми побачимо «погіршеність», рівну кількості фальшивих монет. Кількість монет вкаже на номер капелюха.

Задача 6. Мішки з золотими монетами.

Коли Ерудит працював у банку місіс Брейн, туди принесли 10 мішків з золотом, які вона отримала у спадок. Місіс Брейн сказала, що в кожному мішку по 10 монет. В дев'яти мішках монети справжні, а в одному – всі фальшиві. Справжня монета важить 5 г, а фальшива – 4 г. У Ерудита були терези, що показували вагу в грамах, і він всього за одне зважування визначив в якому мішку монети фальшиві.



Як Ерудит зміг за одне зважування визначити в якому мішку фальшиві монети?

Розв'язання. Пронумеруємо мішки від 1 до 10. З першого мішка беремо одну монету, з другого – дві, з третього – три і т.д. зважуємо відібрані монети. Якби всі монети були справжніми, то вага була б 275 грамів (бо всього ми взяли 55 монет). Але насправді в одному з мішків монети фальшиві. Якби це був перший мішок, то вага буде на 1 г менше (бо звідти ми взяли одну монету). Якщо фальшивки були в другому, то на 2 г менше і т. д.

Задача 7. Важимо під водою.

Ерудит має звичайні чашкові терези, на яких лежать: на одній чашці – камінь, вагою 2 кг, на другій гиря, що важить також 2 кг. Ерудит обережно занурив терези під воду. Чи залишились терези в рівновазі?



Розв'язання. Будь-яке тіло, занурене в воду, стає легшим. Воно «втрачає» стільки скільки

важить витіснена ним вода. Камінь займає більший об'єм, отже, і витісняє більший об'єм води чим гиря. За законом Архімеда камінь в воді «втрачить» більше ваги. Отже, терези під водою переважать в сторону гирі.

IV. Підсумок заняття. Рефлексія.

V. Домашнє завдання.

№ 1. З 21 монети 10 справжніх і 11 фальшивих, причому кожна фальшива на 1 г легша за справжню. Взяли одну з монет, як за одне зважування на терезах зі стрілкою визначити чи фальшива монета?

№ 2. Маємо 6 однакових за виглядом монет, чотири з них справжні, по 4 г кожна, а дві — фальшиві: вагою 5 г і 3 г. За чотири зважування на шалькових терезах без гир знайдіть обидві фальшиві монети.

№ 3. Як зважити вантаж на шалькових терезах з гирями, якщо гирі правильні, а терези не правильні.

№ 4. У пакеті 9 кг крупів, За допомогою терезів з гирями 50 г і 200 г треба розкласти ці крупи у два пакети: в один – 2 кг, в другий – 5 кг. Спробуйте це зробити за три зважування. Знайдіть два способи розв'язання цієї задачі.

№ 5. Є 5 монет, серед яких одна фальшива (невідомо, легша вона чи важча від справжньої). Маса справжньої монети 5 г. Як за допомогою двох зважувань на терезах можна визначити фальшиву монету, маючи одну гирю масою 5 г?

ЗАНЯТТЯ 14–15

Тема. Задачі на переливання.

Мета:

формування предметних компетентностей: познайомити учнів з новим видом задач – задачами на переливання та способами їх розв’язування, формувати вміння та навички розв’язувати даний тип задач;

формування ключових компетентностей: формувати вміння відбирати й використовувати потрібні знання та способи діяльності для досягнення мети; формувати вміння аналізувати, порівнювати, встановлювати аналогії; сприяти самовихованню наполегливості, працездатності;

розвивати: обчислювальні навички, логічне та просторове мислення;

виховувати: старанність, спостережливість, культуру математичної мови і графічних записів.

Предмет математики настільки серйозний, що корисно не нехтувати нагодою робити його трохи цікавішим.

Блез Паскаль

ХІД ЗАНЯТТЯ

I. Організаційний момент.

Перевірити готовність учнів до заняття. Налаштувати їх на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання.



Перевірити якість виконання домашнього завдання. Відповісти на питання, які викликали в учнів під час виконання завдань.

III. Основна частина.

Задачу на переливання називають задачею Пуассона (1781–1840). Це знаменитий французький математик, механік та фізик. Коли він був ще молодим та вагався у виборі життєвого шляху, приятель показав йому декілька задач, які сам не зміг розв’язати. Пуассон швидко розв’язав всі.

Задачі на переливання допомагають розвивати логічне мислення, просторову уяву, витримку, наполегливість у знаходженні оптимального розв’язку.

Задачі на переливання – це задачі, в яких за допомогою посудин з відомими місткостями необхідно виміряти деяку кількість рідини. Найпростіший прийом розв’язування задач цього типу полягає в переборі всіх можливих варіантів. Зрозуміло, що такий метод розв’язання не зовсім вдалий, бо в ньому складно виділити який-небудь загальний підхід для розв’язування інших задач.



Більш систематичний підхід до розв’язування задач на «переливання» полягає у використанні окремих таблиць, в які заносять кількість рідини до кожної із посудин, що розглядають.

Типові задачі на переливання

В задачах на переливання необхідно вказати послідовність дій, під час яких виконується потрібне переливання та виконуються всі умови задачі. Якщо немає інших вимог, тоді вважають, що:

- всі місткості без поділок;
- неможна перелити рідину «на око»;
- ми можемо точно сказати, скільки рідини в посудині, тільки в наступних випадках:
 - знаємо, що місткість порожня;
 - знаємо, що місткість повна, а в задачі подана її місткість;
- в задачі дано, скільки рідини в посудині, а переливання з використанням посудини не проводилося;
- в переливанні брали участь дві посудини, в кожній з яких відомо, скільки було рідини, і після переливання вся рідина вмістилася в одну з них;
- в переливанні брали участь дві посудини, в кожній з яких відомо, скільки було рідини, відома місткість тієї посудини, в яку переливали, відомо, що вся рідина в неї не помістилася; ми можемо знайти, скільки її залишилося в іншій місткості.

Всі задачі на переливання принципово діляться на 2 типи.

Перший тип – коли у нас є багато рідини (озеро, нескінченно велика діжка, водопровід), і ми можемо наповнити доверху місткість багато разів поспіль, тобто кількість рідини не обмежена. При цьому ми можемо спокійно вилити воду з місткостей.



Другий тип – це коли рідини у нас рівно стільки, скільки налито спочатку в місткостях (в цьому випадку у нас зазвичай не звичайна рідина, а яка-небудь особлива: молоко, сік тощо). Частіше за все цю рідину ще й неможна пролити – автори намагаються оговорювати це окремо. Якщо ж ми можемо вилити рідину, то в умовах задачі зазвичай присутній який-небудь персонаж, який може пити даний тип рідини: Котигорошко, сусід Павло тощо.

Наведемо приклади розв'язування задач.

Задача першого типу

Задача 1. Для приготування компоту матусі потрібно налити в 5-літрову каструлю 4 літри води. Як мамі впоратися з цією задачею, якщо у неї є крім цієї каструлі ще 3-літрова банка, водопровідний кран і раковина, куди можна вилити воду?



Розв'язання. Наллємо в 3-літрову банку води і переллємо її в каструлю. Потім ще раз наповнимо банку й виллємо в каструлю, скільки поміститься. Тоді в каструлі буде 5 літрів і 1 літр в 3-літровій банці. Тепер виллємо всю воду з каструлі в раковину. Потім переллємо літр з банки в каструлю і додамо ще три літри, наповнивши банку ще раз. Тепер в каструлі $1 + 3 = 4$ літри, що і вимагалось. Задача розв'язана.

Наше розв'язання можна проілюструвати таблицею:

Каструля, літри	Банка, літри
0	3
3	0
5	1
0	1
1	0
1	3
4	0

Отже, ми отримали бажані 4 літри. Задача розв'язана! Такий спосіб розв'язання за допомогою таблиці є достатньо наочним.

Задача другого типу

Задача 2. У Олени є 2 глечики об'ємом 8 й 3 літри. У восьмилітровому глечикі налито весь кисіль, що є у Оленки. Як відлити 2 літри киселю? Всі надлишки киселю можна віддати сусіду Грицьку, який просто обожнює ці ласощі.

Розв'язання. Наповнимо трилітровий глечик доверху з восьмилітрового, після цього у нас буде 5 літрів у 8-літровому і 3 літри у 3-літровому. Віддамо весь кисіль з 3-літрового глечика Грицьку. Після цього у нас залишиться 5 літрів у 8-літровому глечикі, а 3-літровий глечик зостанеться пустим. Знову наповнимо 3-літровий глечик з 8-літрового. Після цієї операції у 8-літровому глечикі у нас залишиться рівно 2 літри ($5 - 3 = 2$). Ми відміряли 2 літри. Задача розв'язана!

Розв'язання також можна проілюструвати таблицею:

3-літровий глечик	8-літровий глечик
0	8
3	5
0	5
3	2

Задача 3. В каструлі налито 8 літрів яблучного сиропу. Є також пусті 3-х й 5-літрові банки. Потрібно відміряти 4 літри супу. Як це зробити, якщо суп неможна проливати?

Розв'язання.

1 спосіб. Наллємо сиром доверху у меншу банку, потім переллємо три літри, що залишилися в 5-літрову банку, а 3-літрову наповнимо знову. Тепер будемо лити сироп з 3-літрової банки в 5-літрову, поки вона не наповниться доверху. Тоді в меншій банці залишиться 1 літр ($5 - 3 = 2$ й $3 - 2 = 1$).

Переллємо 5 літрів в каструлю, а 1 літр – у велику банку. Потім переллємо 3 літри з каструлі в меншу банку. Після цього в каструлі залишиться рівно 4 літри. Задача розв’язана.

2 спосіб. Наллємо сироп доверху у велику банку, тоді в каструлі залишиться рівно 3 літри. Переллємо з великої банки в менше ніж 3 літри, після чого переллємо їх в каструлю. Переллємо 2 літри з великої банки в меншу, і наповнимо велику банку доверху сиропом з каструлі. Після чого доллємо меншу банку (там було 2 літри, а поміщається 3) з великої банки. Отримаємо 4 літри у великій банці. Задача розв’язана.

Проілюструємо обидва способи таблицями:

1 спосіб			2 спосіб		
Каструля, л	Банки, л		Каструля, л	Банки, л	
	3	5		3	5
8	0	0	8	0	0
5	3	0	3	0	5
5	0	3	3	3	2
2	3	3	6	0	2
2	1	5	6	2	0
7	1	0	1	2	5
7	0	1	1	3	4
4	3	1			

IV. Відпрацювання навичок та вмій. Розв’язування задач.

Отже, розв’язування задач на переливання краще записувати у вигляді таблиці, де видно, яка кількість рідини знаходиться в посудинах на цей момент часу.

Задача 1. Як, використовуючи банки 3л і 5л, набрати води рівно 1 л?

Розв’язання.

Банки	Переливання			
5 л	-	3	3	5
3 л	3	-	3	1

Задача 2. Як відлити 4 л води за допомогою банок 3л і 5л?

Розв’язання.

Банки	Переливання							
5 л	-	3	3	5	-	1	1	4
3 л	3	-	3	1	1	-	3	-

Задача 3. Яким чином з річки можна принести рівно 6 л води, якщо є тільки два відра – 4 л і 9 л?

Розв’язання.



Банки	Переливання						
9 л	9	5	5	1	1	-	
4 л	-	4	-	4	-	1	



Задача 4. Бідон місткістю 10 л заповнено молоком. Треба перелити з цього бідона 5 л у семилітровий бідон, використовуючи вільний трьохлітровий бідон.

Розв'язання.

Банки	Переливання							
10 л	3	3	6	6	9	9	2	2
7 л	7	4	4	1	1	-	7	5
3 л	-	3	-	3	-	1	1	3

Задача 5. Маємо два бідони місткістю 4 л і 5 л. Чи можна налити у відро 3 л води, якщо об'єм відра не менше ніж три літри?

Розв'язання.

Посудини	Переливання				
5 л	-	4	4	5	5
4 л	4	-	4	3	-
3 л	-	-	-	-	3

Задача 6. У великого алхіміка є нерозчинна колба, в якій міститься 12 мілілітрів сірчаної кислоти, а також дві нерозчинні мензурки об'ємом 5 і 7 мілілітрів. Як йому отримати дві порції по 6 мілілітрів сірчаної кислоти, необхідних для досвіду? (Кислота розчинить будь-який інший посуд в лабораторії.)

Розв'язання.

Крок	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
12ml	12	5	5	10	10	3	3	8	8	1	1	6
5ml	0	0	5	0	2	2	5	0	4	4	5	0
7ml	0	7	2	2	0	7	4	4	0	7	6	6

Задача 7. Одного дня Вінні-Пух захотів поласувати медом і пішов до бджіл в гості. По дорозі нарвав букет квітів, щоб подарувати бджілкам. Бджілки дуже зраділи, побачивши ведмедика з букетом квітів, і сказали: «У нас є велика бочка з медом. Ми дамо тобі меду, якщо ти зможеш за допомогою двох судин місткістю 3 л і 5 л налити собі 4 л!» Вінні-Пух довго думав, але все-таки зміг розв'язати задачку. Як він це зробив?



Розв'язання.

Крок	1	2	3	4	5	6
5 л	5	2	2	0	5	4
3 л	0	3	0	2	2	3

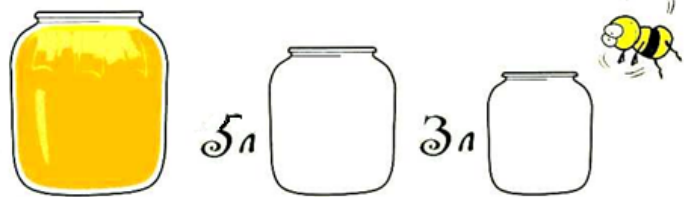
Або

Крок	1	2	3	4	5	6	7	8
5 л	0	3	3	5	0	1	1	4
3 л	3	0	3	1	1	0	3	0

Задача 8. Дядько Федір зібрався їхати до батьків в гості і попросив у kota Матроскіна 4 л простоквашинського молока. А в Матроскіна лише 2 порожніх бідони: трилітровий і п'ятилітровий. І восьмилітрове відро, наповнене молоком. Як Матроскіну відлити 4 літри молока за допомогою наявних судин?

Розв'язання.

Переливаємо з восьмилітрового відра 5 літрів молока в п'ятилітровий бідон. Переливаємо з п'ятилітрового бідона 3 літри в трилітровий бідон. Переливаємо їх тепер у восьмилітрове відро. Отже, тепер трилітровий бідон порожній, у восьмилітровому 6 літрів молока, а в п'ятилітровому – 2 літри молока. Переливаємо 2 літри молока з п'ятилітрового бідона в трилітровий, а потім наливаємо 5 літрів з восьмилітрового відра в п'ятилітровий бідон. Тепер у восьмилітровому 1 літр молока, в п'ятилітровому – 5, а в трилітровому — 2 літри молока.



Доливаємо трилітровий бідон з п'ятилітрового і переливаємо ці 3 літри у восьмилітрове відро. У восьмилітровому відрі стали 4 літри, так само як і в п'ятилітровому бідоні.

Крок	1	2	3	4	5	6	7	8
8 л	8	3	3	6	6	1	1	4
3 л	0	0	3	0	2	2	3	0
5 л	0	5	2	2	0	5		

Задача 9. У Карлсона є відро варення, воно вміщує 7 літрів. У нього є 2 порожніх відерця: 4-літрове і 3-літрове. Допоможіть Карлсону відлити 1 літр варення до чаю в менше (3-літрове) відерце, залишивши 6 літрів у великому (7-літровому) відрі.



Розв'язання.

Крок	1	2	3	4
7 л	7	3	3	6
4 л	0	4	1	1
3 л	0	0	3	0

Задача 10. Тому Соєру потрібно пофарбувати паркан. Він має 12 л фарби і хоче відлити з цієї кількості половину, але у нього немає судини місткістю в 6 л. У нього 2 судини: одна – місткістю в 8 л, а інша – місткістю в 5 л. Яким чином налити 6 л фарби в судину на 8 л? Яке найменше число переливань необхідно при цьому зробити?



Розв'язання.

Крок	1	2	3	4	5	6	7	8
12 л	12	4	4	9	9	1	1	6
8 л	0	8	3	3	0	8	6	6
5 л	0	0	5	0	3	3	5	0

Задача 11. Губці Бобу терміново потрібно налити з водопровідного крану 6 л води. Але він має лише дві судини: 5-літрову і 7-літрову. Як йому це зробити?

Розв'язання.

Крок	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7 л	7	2	2	0	7	4	4	0	7	6
5 л	0	5	0	2	2	5	0	4	4	5

Задача 12. Влітку Вінні-Пух зробив запас меду на зиму вирішив розділити його навпіл, щоб з'їсти половину до Нового Року, а іншу половину — після Нового року. Весь мед знаходиться у відрі, яке вмещає 6 літрів, у нього є 2 порожніх банки - 5-літрова і 1-літрова. Чи може він розділити мед так, як задумав?

**Розв'язання.**

Крок	1	2	3	4	5	6
6 л	6	1	1	2	2	3
5 л	0	5	4	4	3	3
1 л	0	0	1	0	1	0

V. Підсумок заняття. Рефлексія.**VI. Домашнє завдання.****Задачі для самостійного розв'язування:**

1. Чи можна за допомогою двох посудин 3л і 5л набрати з крана 4 л?
2. Маємо дві посудини місткістю 8л та 5л. Як за допомогою цих посудин надити 7 л води з водопровідного крану?
3. Як, маючи два відра місткістю 4л і 9л, налити з водопровідного крану 6 л води?
4. Маємо три посудини 8л, 5л і 3л. Перша з них наповнена водою. Як розлити воду в дві з цих посудин, щоб у кожній було по 4 л?
5. Бочка, що вмещає 12 відер, наповнена гасом. Необхідно розлити його на дві рівні частини, використовуючи дві додаткові посудини в 5 і 9 відер.



ІГРИ ЗАНЯТТЯ 16–17

Тема. Відгадування задуманого числа.

Мета:

- ⇒ **формування предметних компетентностей:** ознайомити учнів з новими типом задач, що містять «магію» чисел, зокрема задачами на відгадування задуманого числа; відпрацьовувати навички розв'язування задач такого типу;
- ⇒ **формування ключових компетентностей:** формувати вміння відбирати й використовувати потрібні знання та способи діяльності для досягнення мети; формувати вміння оперувати числовою інформацією; сприяти самовихованню об'єктивності, принциповості;
- ⇒ **розвивати:** обчислювальні навички, логічне мислення;
- ⇒ **виховувати:** старанність, спостережливість, культуру математичної мови і графічних записів.

ХІД ЗАНЯТТЯ

I. Організаційний момент.

Перевірити готовність учнів до заняття.
Налаштувати їх на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання.

Перевірити якість виконання завдання. Відповісти на питання, які виникли в учнів під час виконання завдань.

III. Основна частина.

Арифметичні фокуси — це експерименти, в основі яких лежать властивості чисел і арифметичних дій. Розгадати секрет фокуса — означає знайти його математичну закономірність. Арифметичні фокуси з'явилися разом з виникненням математики як науки. Відомо, що фокусникові для виконання фокусів, як правило, потрібний асистент. Кожен із вас може спробувати себе як у ролі фокусника, так і в ролі асистента.

IV. Відпрацювання навичок та вмінь. Розв'язування задач.

Задача 1. Сума яких трьох чисел дорівнює їхньому добутку? (1, 2 та 3)

Задача 2. Запишіть трьома двійками максимально велике число. (2^{22})

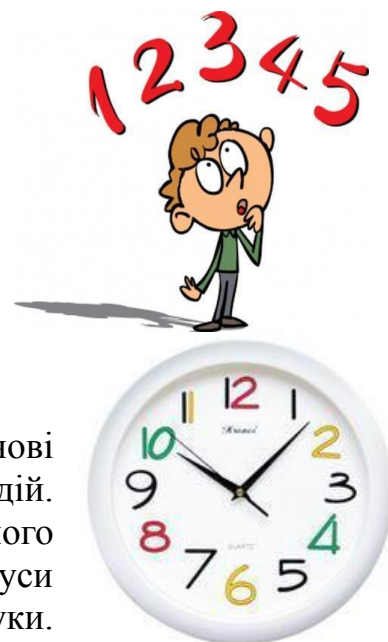
Задача 3. Запишіть двома цифрами максимально велике число. (9 піднести до степеня 9^9).

Задача 4. Як зменшити число 999 у 1,5 раза? (Перевернути аркуш, на якому воно написано догори ногами. Отримаємо 666)

Задача 5. Як, не виконуючи ніяких записів, зменшити 98 на 12? (Перевернути аркуш. Отримаємо 86)

Задача 6. Яке число можна перетворити у нескінченність, не виконуючи математичних дій? (8; ∞)

Задача 7. Як 18 розділити на дві половини, щоб у кожній отримати 10? (Провести горизонтальну вісь симетрії)



Задача 8. Коли ми дивимося на 2, а говоримо 10. (Визначаємо час за годинником)

Задача 9. Як можна пояснити, що $12 + 12 = 0$, $9 + 9 = 6$. (Мовою годинника)

Задача 10. Чи завжди після 12 йде 13? (На циферблаті після 12 йде 1)

Задача 11. Як з трійки отримати 8? (Приставити до неї дзеркало)

Задача 12. Порахуйте:

П'ять, п'ятнадцять,
без двох двадцять,
семеро, троє,
ще й малих двоє. (50)

П'ять, п'ятнадцять,
без двох двадцять,
сорок, чотири,
три і п'ятнадцять. (100)

Задача 13. Математик запропонував хлопчику назвати найбільше число. Його обличчя витягнулося, коли він почув відповідь. Він і сам би не зміг назвати більшого. Яке число назвав хлопчик? (31-ше — найбільше число місяця)

Задача 14. Ти та я, та ми з тобою. Скільки нас, ти знаєш? (Двоє)

Задача 15. У кожного з трьох братів по одній сестрі. Скільки дітей у сім'ї? (4)

Задача 16. Росте 4 берези. На кожній – по 4 гілки. На кожній гілці – по 4 яблука. Скільки всього яблук росло? (На березі яблука не ростуть)

Задача 17. Задумай тризначне число, що не закінчується нулем і крайні цифри в якому різняться більше ніж на 1. Перестав у ньому цифри у зворотному порядку. Відними менше число від більшого. До різниці додай цю ж різницю, написану у зворотному порядку. Незалежно від загаданих цифр, завжди відповідь буде 1089. (Перельман)

Задача 18. Задумай тризначне число. Допиши до задуманого це число ще раз. Передай папірець сусідові й попроси його поділити це число на 7. Наступний сусід нехай поділить результат на 11. Третій учасник поділить результат на 13. Папірець передай тому, хто загадував число. На папірці те число, яке він задумав. (Перельман).

Задача 19. Відгадування дати народження.

Число народження слід подвоїти, потім помножити на 10. До результату додати 73. Суму помножити на 5, додати порядковий номер місяця народження. Відняти 365 (це вже може робити й сам фокусник). Перші дві цифри відповіді — число народження, останні дві — місяць народження.



Задача 20. Задумай число з 3 цифр. Першу цифру слід подвоїти й збільшити результат на 5. Помнож відповідь на 5. Додай другу цифру числа. Результат помнож на 10. Додай третю цифру числа. (Ведучий від результату віднімає 250 та отримує те число, яке було задумане.)

Задача 21. Запиши багатозначне число. Перестав цифри в будь-якому порядку. Відними від більшого числа менше. Одну із цифр різниці закресли. Цифри, що залишилися, повідом ведучому. (Ведучий знаходить суму цих цифр і



відгадує, яка цифра була закреслена — це цифра, якої не вистачає, щоб сума ділилася на 9.

Задача 22. Чарівне число.

Чи знаєте ви про чарівні властивості деяких чисел? Наприклад, число 142857. Помножте його на 1, на 2, на 3, на 4, на 5, на 6 і ви помітите що добутки складаються з одних і тих самих цифр цього ж таки числа, тільки записаних у різних послідовностях. А якщо це число помножити на 9?

V. Підсумок заняття. Рефлексія.

VI. Домашнє завдання.

Виконайте творче завдання. Знайдіть або придумайте самостійно цікавий фокус із числами й арифметичними діями. Запишіть секрет цього фокуса.



ЗАНЯТТЯ 18–19

Тема. Математичні фокуси.

Мета:

- ⇒ **формування предметних компетентностей:** ознайомити учнів з поняттям математичного фокуса; формувати вміння та навички практичного досвіду у розв'язуванні таких задач;
- ⇒ **формування ключових компетентностей:** формувати вміння організовувати та планувати свою навчальну діяльність; сприяти прагненню до вдосконалення результатів своєї діяльності, самовихованню толерантності, доброзичливості, принциповості;
- ⇒ **розвивати:** обчислювальні навички, логічне та просторове мислення; **виховувати:** старанність, спостережливість, культуру математичної мови і графічних записів.

ХІД ЗАНЯТТЯ

I. Організаційний момент.

Перевірити готовність учнів до заняття. Налаштувати їх на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання.

Перевірити якість виконання завдання. Відповісти на питання, які виникли в учнів під час виконання завдань.

III. Основна частина.

Багато хто вважає математику нудною і важкою наукою: складні задачки, рівняння, формули... Голова обертом. Проте світ чисел і прикладів набагато цікавіший, ніж здається на перший погляд. Хочеш відчувати себе фокусником і викликати захоплення та здивування у друзів? Тоді вперед!



IV. Відпрацювання навичок та вмінь. Розв'язування задач.

Фокус 1. Відгадати дату народження.

Фокус навчить, як відгадати дату народження. **Секрет фокуса** полягає в наступному: для початку треба обрати «жертву», після чого попросити її «про себе» поррахувати:

1. День свого народження помножити на два.
2. До результату додати 5.
3. Отриманий результат помножити на 50.
4. Додати номер місяця, в якому народився.

Попросіть людину назвати отримане число. Потім просто відняти 250 від отриманого, і готово. Вийде 4 або 3 цифри. Перші 2 (може бути і одна цифра) – день, а дві останні – місяць народження.

Фокус 2. Повна сума.

Для фокуса потрібні лише два гральних кубики. Киньте їх на стіл. Нижні грані кубиків вам не видно. Візьміть кубики і покажіть ці грані глядачеві. Нехай він складе невидимі вам очки. Відкладіть кубики в сторону і правильно назвіть шукану суму двох нижніх граней. **Секрет фокуса:** вам потрібно знати, що на

гральних кубиках сума очок на протилежних гранях дорівнює семи. Якщо з одного боку 2 очки, значить, з іншого – буде 5. Вам видно верхні грані кубиків. Припустимо, з вашого боку 4 і 1, тобто в сумі – 5. А загальна сума очок на протилежних гранях обох кубиків дорівнює 14. Значить, щоб назвати суму, відому глядачеві, від 14 відніміть 5. Вона буде 9, назвіть її. Адже на гранях кубиків, які бачив глядач, було 3 і 6 очок.



Фокус 3. Сума непарних чисел.

Просіть глядача за 1 хвилину порахувати суму всіх непарних чисел від 0 до 20 (без калькулятора). Швидше за все він не встигне. Говорите:

- Ну ти і черепаха, спробуй ще раз, тільки хутчіше, яка сума непарних від 0 до 45 включно?

Швидше за все глядач відмахнеться, мовляв, я й до 20 не зміг, а тут до 45 (тут уже можна і з калькулятором, але знову таки зробити обмеження в часі, щоб він ну ніяк не встиг). Ви ж легко рахуєте суму всіх непарних, навіть багатозначних чисел (тільки хто перевіряти буде). **Секрет фокуса:** потрібно до останнього (заданого) непарного числа додати 1, поділити на 2 і піднести до квадрата. Приклад: від 1 до 49 включно $49 + 1 = 50$, $50 : 2 = 25$, $25 \cdot 25 = 625$. Якщо Вас попросять порахувати вже дуже велике число, то Вам доведеться таки скористатися калькулятором, але оскільки рахувати дуже мало, Ви це зробите за 10-15 секунд.

Фокус 4. Знову і знову П'ЯТЬ.

Простенький і коротенький фокус, де фокуснику навіть не потрібно нічого рахувати і думати. Попросіть у глядачів задумати будь-яке число (хоч 50-тизначне). Потім пропонуєте їм виконати наступні дії: додати до задуманого числа наступне число, що слідує за ним, потім до суми додати 9, розділити отримане число, навпіл і відняти від результату задумане число. Ви легко називаєте число, яке вийшло у глядачів!



Секрет фокуса: ви легко вгадуєте скільки вийшло у глядачів, тому що, яке б число вони не загадали, після всіх підрахунків у них завжди буде 5.

Приклад:

загадали 26,

$26 + 27 = 53$,

$53 + 9 = 62$,

$62 : 2 = 31$,

$31 - 26 = 5$;

загадали 565,

$565 + 566 = 1131$,

$1131 + 9 = 1140$,

$1140 : 2 = 570$,

$570 - 565 = 5$;

загадали 44444,

$44444 + 44445 = 88889$,

$88889 + 9 = 88898$,

$88898 : 2 = 44449$,

$44449 - 44444 = 5$.

Фокус 5. Живий комп'ютер

Ви просите когось із глядачів написати в стовпчик два десятизначних числа (чим більше значення числа, тим ефектніший фокус), потім під ними пишете своє число, підводите ризику і миттєво записуєте відповідь.

Секрет фокуса: коли Ви пишете своє число, то обираєте його не довільно, а так, щоб сума кожної цифри другого числа, записаного глядачем, складала з кожною цифрою вашого числа 9. Таким чином, у Вас виходять не три різних десятизначних числа, а два, з яких одне матиме всі дев'ятки. А значить Ви миттєво можете написати результат: треба просто переписати перше число глядача і поставити перед ним одиницю, а від останньої цифри відняти одиницю!

Приклад:

$$4563843274 + 7498854231 + 2501145768 = 14563843273$$

Фокус 6. Математичне чаклунство

За допомогою цього фокусу Ти зможеш безпомилково порахувати, скільки братів і сестер у твоїх знайомих, не питаючи їх про це.

Необхідно, щоб спочатку твій друг (чи подружка) до кількості своїх братів додали число 3 (але результат тобі не повідомили). Потім отримане число помножили на 5, додали 20, суму помножили на 2. До результату додали ще й кількість сестер, плюс число 5.



Потім він чи вона називають остаточний результат. Тоді справа за тобою! Від отриманого числа відними 75 (звісно, другу про це нічого не кажи).

Двозначне число, яке ти отримаєш, вкаже на склад сім'ї: перша цифра – кількість братів, друга – сестер.

Ось як усе просто!

V. Підсумок заняття. Рефлексія.

VI. Домашнє завдання.

Придумайте власні математичні фокуси. Спробуйте їх обґрунтувати.

ЗАНЯТТЯ 20–23

Тема. Симетрія. Стратегії.

Мета:

формування предметних компетентностей: ознайомити з поняттям симетрії та прийомами вироблення стратегії при розв'язуванні деяких задач;

формування ключових компетентностей: формувати вміння відбирати й використовувати потрібні знання та способи діяльності для досягнення мети; сприяти створенню об'єктивної самооцінки, сприяти самовихованню свідомого ставлення до навчання;

розвивати: обчислювальні навички, логічне та просторове мислення;

виховувати: старанність, спостережливість, культуру математичної мови і графічних записів.

ХІД ЗАНЯТТЯ

I. Організаційний момент.

Перевірити готовність учнів до заняття. Налаштувати їх на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання.

Перевірити якість виконання завдання. Відповісти на питання, які виникли в учнів під час виконання завдань.

III. Основна частина.

Математична гра – це гра двох осіб (інколи трьох). Ходи гравці роблять по черзі, жоден з них не може пропустити хід). Вважається що гравці грають сумлінно, найкращим чином. У таких іграх можна визначити кінцевий результат, тобто передбачити виграш одного з гравців.

Спробуйте здогадатися, чому в цій грі виграє завжди перший гравець?

Задача. Двоє по черзі розрізають паперу клітинку, розміром 40×30 клітинок. За один хід дозволяється зробити прямолінійний розріз будь-якої частини вздовж лінії клітинок. Програє той, хто не зможе зробити хід.

Розв'язання. Після кожного ходу кількість частинок збільшується рівно на 1. Спочатку був один шматок. В кінці гри, коли не можна зробити жоден хід, папір розрізаний на клітинки 1×1 . А їх – 120. Таким чином, гра буде тривати рівно 119 ходів. Останній, 119-й хід (також, як і всі інші ходи з непарними номерами), зробить перший гравець. Тому він в цій грі перемагає, причому незалежно від того, як він буде грати. Звичайно, це гра — жарт, але вона дозволяє без особливого напруження зрозуміти школярам причини виграшу першого гравця.

Для розв'язування ігрової задачі треба сформулювати виграшну стратегію одного з гравців та довести, що така стратегія веде до виграшу. Наприклад:

Задача. Є дві купи каменів по 7 в кожній. За хід дозволяється взяти будь-яку кількість каменів, але тільки з однієї купи. Програє той, кому нема що брати. Хто може забезпечити собі перемогу в цій грі?



Розв'язання. В цій грі другий гравець перемагає за допомогою симетричної стратегії: кожним своїм ходом він повинен брати стільки ж каменів, скільки попереднім ходом взяв перший гравець, але з іншої купки. Таким чином, якщо у першого гравця є хід, тоді у другого гравця завжди є «симетричний» хід. Симетрія в цій задачі базується на рівності числа каменів у двох купках.

IV. Відпрацювання навичок та вмінь. Розв'язування задач.

Задача 1. Домалювати симетрично запропоновані малюнки:

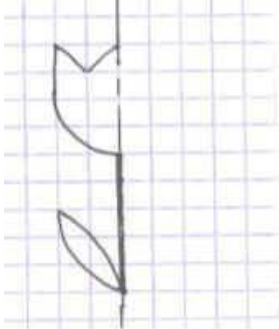


Рис. 1



Рис. 2

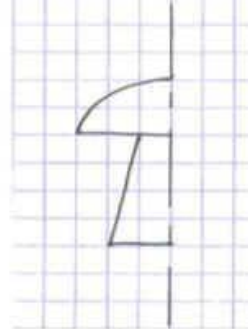


Рис. 3

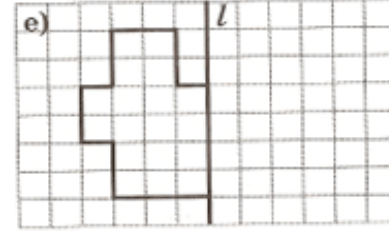
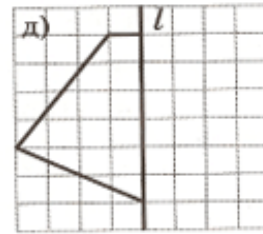
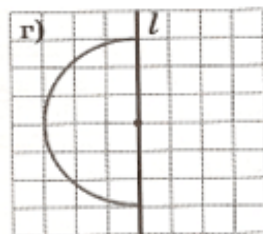
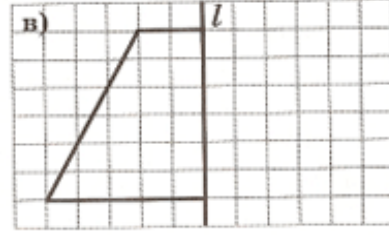
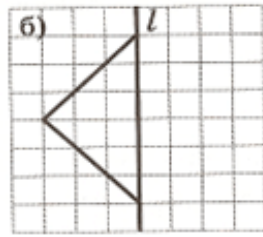
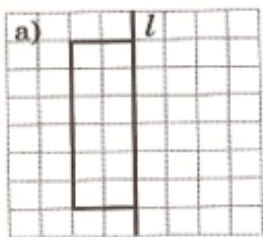


Рис. 4



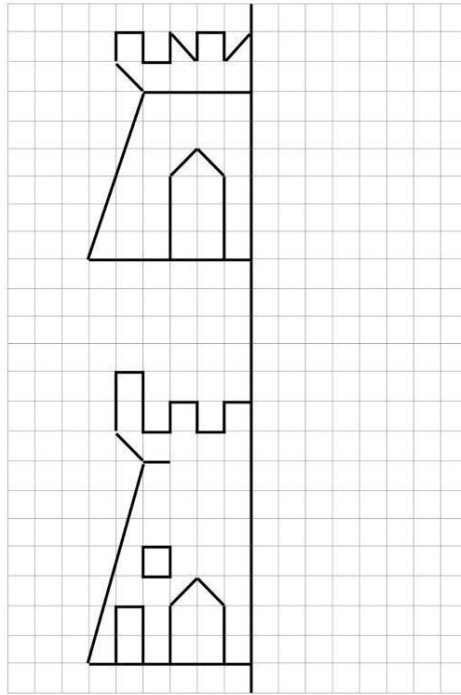
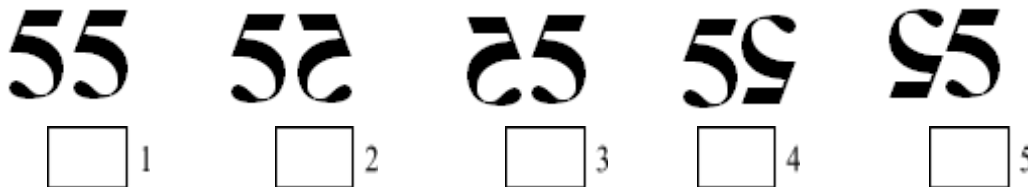


Рис. 5

Задача 2. Дано дзеркальне відображення 4-х цифр. Яка наступна фігура?



Варіанти відповідей:



Задача-жарт. На аркуші паперу поставили дев'ять точок.



Через ці точки провести чотири відрізки, не відриваючи олівця від паперу.

Задача 3. Двоє по черзі ставлять коні в клітинки шахової дошки так, що коні не б'ють один одного. Програє той, хто не може зробити хід.

Розв'язання. Виграє другий. Можна використати і центральну, і осьову симетрію шахівниці.

Задача 4. Двоє по черзі ставлять королі у клітинки дошки 9×9 так, що королі не б'ють один



одного. Програє той, хто не може зробити хід. Хто забезпечить собі виграш?

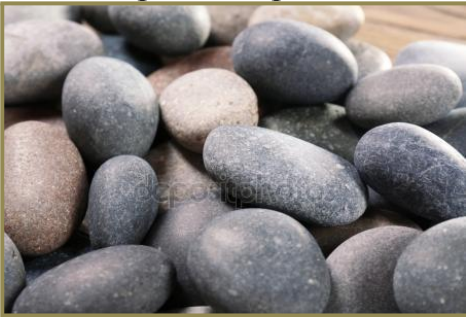
Розв'язання. Виграє перший. Перший хід в центр дошки, а після цього – центральна симетрія ходів першого гравця після ходів суперника.

Задача 5. Дано клітчасту дошку 10×10 . За хід дозволяється покрити будь-які 2 сусідні клітинки прямокутником 1×2 так, щоб прямокутники не перекривались. Програє той, хто не може зробити хід. Хто забезпечить собі виграш?

Розв'язання. Виграє другий, якщо дотримується під час кожного ходу центрально-симетричної стратегії покриття дошки.

Задача 6. В кожній клітинці дошки 11×11 стоїть шашка. За хід дозволяється зняти з дошки будь-яку кількість шашок, що йдуть підряд, або з одного вертикального, або з одного горизонтального ряду. Виграє той, хто зняв останню шашку. Хто забезпечить собі виграш?

Розв'язання. Виграє перший. Першим ходом він знімає центральну шашку, а потім грає центрально-симетрично.



Задача 7. Є дві купки камінців: в одній – 30, в другій – 20. За хід дозволяється брати будь-яку кількість камінців, але тільки з однієї купки. Програє той, кому немає що брати. Хто забезпечить собі виграш?

Розв'язання. Виграє перший. Першим ходом він зрівнює кількість камінців у купках, після чого обирає «симетричну» стратегію виграшу.

Задача 8. На колі розставлено 20 точок. За хід дозволяється з'єднати будь-які дві з них відрізком, що не перетинає відрізків, які проведено раніше. Програє той, хто не може зробити хід. Хто забезпечить собі виграш?

Розв'язання. Виграє перший. Першим ходом він проводить хорду, по обидва боки від якої розташовано по 9 вершин. Після цього, на кожний хід другого він відповідає аналогічним ходом по інший бік від цієї хорди.

Задача 9. Ромашка має: а) 12 пелюсток; б) 11 пелюсток. За хід дозволяється відірвати або одну пелюстку, або дві, що ростуть поруч. Програє той, хто не може зробити ходу. Хто забезпечить собі виграш?



Розв'язання. В обох пунктах виграє другий гравець. Незалежно від ходу першого гравця, другий може після свого ходу залишити два однакових за довжиною ланцюжки пелюсток. Далі – симетрія.

Задача 10. На дошці записано 10 одиниць і 10 двійок. За хід дозволяється стерти дві будь-які цифри, а, якщо вони однакові, написати двійку, а якщо різні – одиницю. Якщо остання цифра, що залишилася на дошці одиниця, виграв перший гравець, якщо двійка – то другий. Чому у цій грі завжди перемагає гравець, який не розпочинає гру?

Розв'язання. Парність кількості одиниць на дошці після кожного ходу не змінюється. Оскільки спочатку одиниць було парне число, то після останнього

ходу на дошці не може залишатися одна (непарне число!) одиниця. Тому виграє другий гравець.

V. Підсумок заняття. Рефлексія.

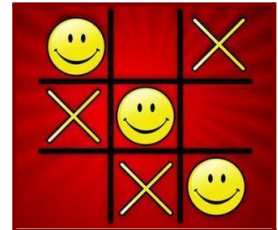
VI. Домашнє завдання.

1. Гра «Хрестики-нулики» проводиться на квадратичному полі 3×3 , що містить 9 квадратних клітин. Двоє гравців по черзі заповнюють вільні клітини: перший заповнить своїми символами горизонтально, вертикально або по діагоналі з трьох квадратів. Якщо це не вдалося нікому, то гра закінчується в нічию. Хто забезпечить собі перемогу?



2. Гра «9 цифр». На столі лежать 9 карток, на кожній з яких написано одну з цифр від 1-го до 9-ти включно. Цифри на всіх картках різні. Картки лежать написами догори. Двоє гравців по черзі беруть по одній картці зі столу. Переможцем вважається той, хто першим візьме 3 картки, сума цифр на яких дорівнюватиме 15 (на руках у переможця можуть бути й інші картки). Хто забезпечить собі перемогу?

3. Гра «9 слів». На столі лежать 9 карток, кожна з них містить одне зі слів: Лорен, какао, місто, хек, ліс, рама, Алла, меч, рік. [Слова на різних картках різні. Картки лежать написами догори, Два гравці по черзі беруть по одній картці зі столу. Переможцем вважається той, хто першим візьме 3 картки зі словами, що мають одну спільну літеру (на руках у переможця можуть бути й інші картки). Хто забезпечить собі перемогу.



4. Певну кількість фішок розташовано в ряд. Два гравці по черзі забирають довільні одну або дві фішки, які стоять поруч, переможцем вважається той, хто зробить останній хід. Хто забезпечить собі перемогу?

5. Певну кількість фішок розташовано по колу. Два гравці по черзі забирають довільні одну або дві фішки, які стоять поруч. Переможцем вважається той, хто зробить останній хід. Хто забезпечить собі перемогу?

6. Два гравці по черзі виймають зі скриньки предмети, кількість яких не перевищує половини наявних у скриньці. Програє той, хто візьме останній предмет. Хто забезпечить собі перемогу?

7. Є дві купи предметів. Два гравці по черзі забирають одну купу, а іншу ділять на дві частини (обидві дії виконує один і той самий гравець). Переможцем вважається той, хто останнім ходом залишить дві купки по одному камінцю. Хто забезпечить собі перемогу?

8. Є 15 шашок, розташованих в ряд. Двоє гравців ходять по черзі. Першим ходом перевертається будь-яка шашка, а кожним наступним – будь-які одна або дві сусідні ще не перевернуті шашки. Переможцем вважається той, хто примусить суперника зробити останній хід. Хто забезпечить собі перемогу?

КОНСТРУКЦІЇ ЗАНЯТТЯ 24–25

Тема. Головоломки із сірниками.

Мета:

- ⇒ **формування предметних компетентностей:** ввести поняття конструкційних задач — головоломок із сірниками; формувати вміння та навички розв'язувати задачі такого типу;
- ⇒ **формування ключових компетентностей:** формувати вміння організовувати та планувати свою навчальну діяльність; формувати вміння оперувати інформацією, поданою графічно та за допомогою сірникових конструкцій; сприяти самовихованню ініціативності, відповідальності, впевненості в собі;
- ⇒ **розвивати:** обчислювальні навички, логічне та просторове мислення;
виховувати: старанність, спостережливість, культуру математичної мови і графічних записів.

ХІД ЗАНЯТТЯ

I. Організаційний момент.

Перевірити готовність учнів до заняття. Налаштувати їх на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання.

Перевірити якість виконання завдання. Відповісти на питання, які виникли в учнів під час виконання завдань.

III. Основна частина. Відпрацювання навичок та вмінь. Розв'язування задач.

Задачі із сірниками прості та водночас не дуже. Для розв'язування цих задач потрібно мати гарну уяву.

Задача 1. Щоб показати кут, достатньо мати 2 сірники. Як зміниться кут, якщо до його сторін прикласти ще по одному сірнику?

Відповідь. Величина кута не зміниться.

Задача 2. Відомо, що з двох сірників можна утворити кут. Скільки кутів можна утворити: а) з 3-х сірників; б) 4-х сірників; в) 5-ти сірників?

Відповідь. а) 3 кути; б) 6 кутів; в) 10 кутів.

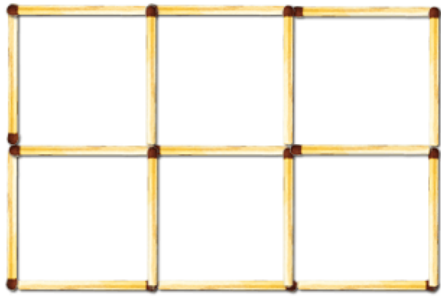
Задача 3. Яку найменшу кількість сірників треба взяти, щоб скласти прямокутник?

Відповідь. 4 сірники. Дістанемо квадрат, а кожний квадрат є прямокутником.

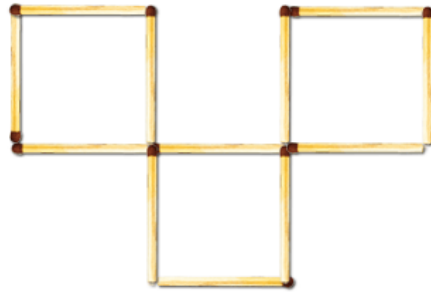
Задача 4. Шість квадратів

Сімнадцять сірників утворюють 6 однакових квадратів, що прилягають один до одного. Заберіть 5 сірників так, щоб залишилося 3 таких самих квадрати.

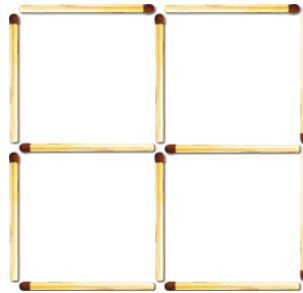




Відповідь.

**Задача 5. Квадрат із 12 сірників**

Дванадцять сірників лежать так, як показано на малюнку. Скільки тут квадратів?

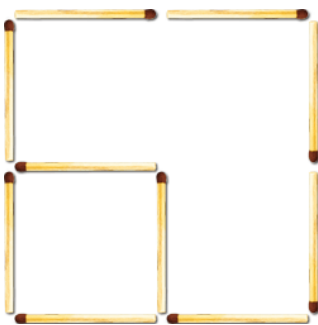


Виконайте наступні завдання:

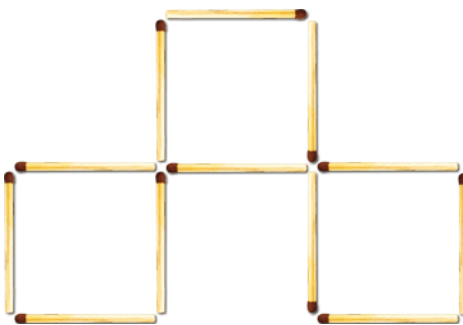
- 1) заберіть 2 сірники так, щоб утворювалося 2 нерівних квадрати;
- 2) перекладіть 3 сірники так, щоб утворилося 3 рівних квадрати;
- 3) перекладіть 4 сірники так, щоб утворювалося 10 квадратів.

Відповіді:

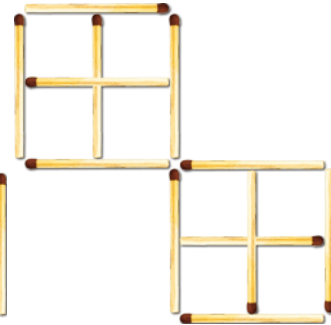
Завдання 1)



Завдання 2)



Завдання 3)

**Задача 6. Стрілка**

Перекладіть 3 сірники так, щоб стріла поміняла свій напрямок на протилежний.

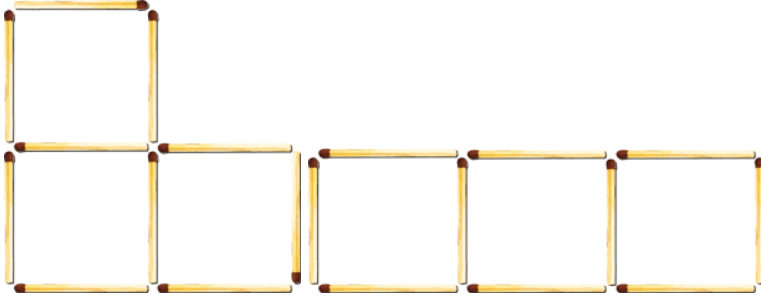


Відповідь.

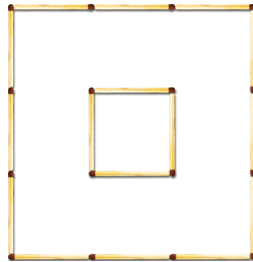
Задача 7. Три квадрати

З 10 сірників складіть три квадрати двома способами.

Відповідь.

**Задача 8. Чотири із шістнадцяти**

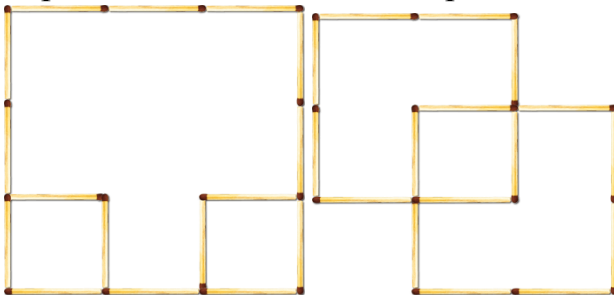
Перекладіть чотири сірники із шістнадцяти так, щоб вийшло три квадрати.



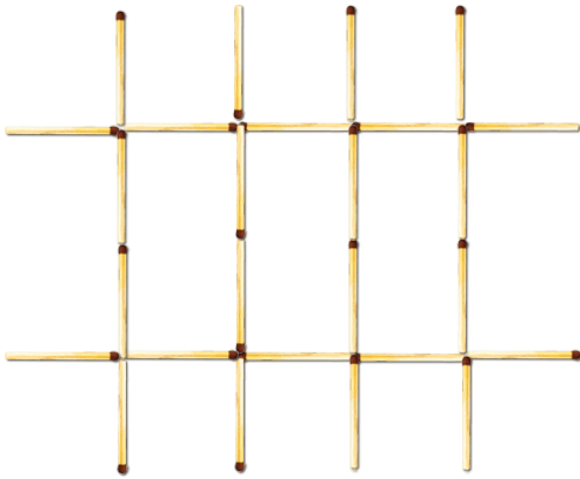
Відповіді:

Варіант 1

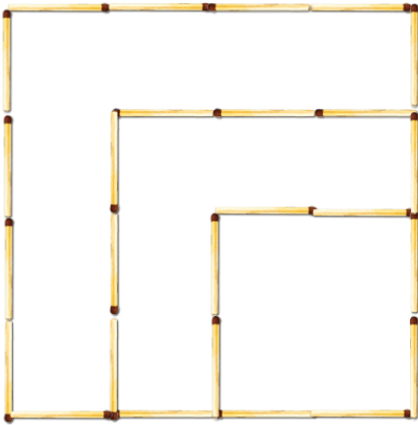
Варіант 2

**Задача 9. Огорожа**

В огорожі, зображеної на малюнку, перекладіть 14 сірників так, щоб вийшло 3 квадрати.



Відповідь.



Задача 10. Метр

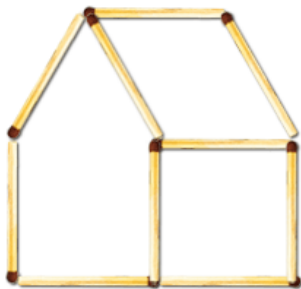
Є 13 сірників по 5 см довжиною кожен. Потрібно зуміти викласти з них метр.

Відповідь.



Задача 11. Будинок

З 10 сірників склали будинок. Потрібно повернути його іншою стороною перекидаючи 2 сірники.



Відповідь.



Задача 12. Будинок з колонами

Фасад будинку складений з 11 сірників.

**Завдання:**

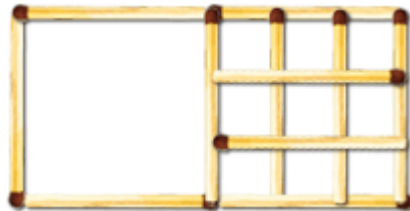
- 1) перекладіть 2 сірники, одержавши при цьому 11 квадратів.
- 2) перекладіть 4 сірники, щоб одержати фігуру з 15 квадратами.

Відповідь.

Завдання 1)



Завдання 2)

**Задача 13. Римські цифри 1**

Переклавши один сірник виправте запис так, щоб рівність стала правильною.

**Відповідь.** $6 + 4 = 10$ **Завдання 14. Римські цифри 2**

Маємо лише три сірники, які не можна ламати. Чи зможеш ти зробити із трьох – чотири?

Відповідь.



Завдання 15. Римські цифри 3

Перед тобою знову всього три сірники, додамо до них ще два... Скільки вийшло? Думаєш, усього п'ять? Ні: цілих вісім! Тільки от як це вийшло?



Відповідь.

IV. Підсумок заняття. Рефлексія.

V. Домашнє завдання.

№ 1. Придорожній знак

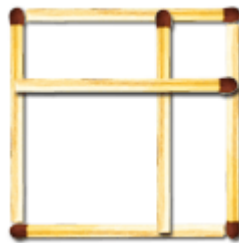
З 9 сірників необхідно зібрати 6 квадратів.

Відповідь.



№ 2. Ґратки

З 8 сірників складені ґратки з маленькими квадратними отворами. Потрібно забрати 2 сірники так, щоб один з отворів виявилася великим квадратом — лазом.

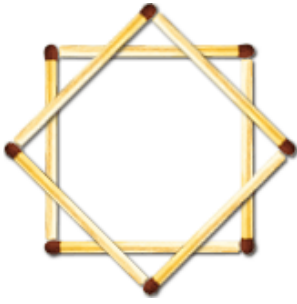


Відповідь.

№ 3. Зірочка

Потрібно взяти всього вісім сірників і скласти з них два квадрати, вісім трикутників і один восьмикутник — і все це одночасно.

Відповідь.



№ 4. П'ять квадратів

Від даних п'яти квадратів із сірників потрібно забрати 3 сірники так, щоб залишилося 3 таких самих квадрати.



ЗАНЯТТЯ 26–28

Тема. Задачі на розрізання фігур.

Мета:

формування предметних компетентностей: познайомити учнів з задачами на розрізання та прийомами їх розв'язування;

формування ключових компетентностей: сприяти усвідомленню цінності нових знань і вмінь, зацікавленості у пізнанні нового; формувати вміння діяти за алгоритмом та складати алгоритми; сприяти самовихованню толерантності, доброзичливості, принципності;

розвивати: обчислювальні навички, логічне та просторове мислення; **виховувати:** старанність, спостережливість, культуру математичної мови і графічних записів.



ХІД ЗАНЯТТЯ

I. Організаційний момент.

Перевірити готовність учнів до заняття. Налаштувати їх на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання.

Перевірити якість виконання завдання. Відповісти на питання, які виникли в учнів під час виконання завдання.

III. Основна частина.

IV. Відпрацювання навичок та вмінь. Розв'язування задач.

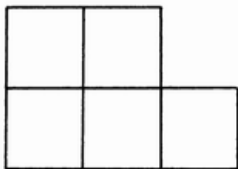
Задача 1. Кавун

Кавун розрізали на чотири частини і з'їли. Після цього залишилось п'ять кірок. Чи може таке бути?

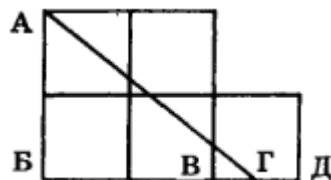
Відповідь: з кавуна можна вирізати шматок у вигляді стовпчика, що проходить крізь весь кавун. У цього шматка будуть дві кірки, що з'єднуються кавуною м'якоттю. Частина кавуна, що залишилася, можна розрізати на нормальні шматки.

Задача 2. Хитрий землемір

Одного разу в кав'ярню невеликого містечка зайшов землемір і став розповідати про ділянку, яке він тільки що провернув. Два фермери купили п'ять акрів землі й попросили землеміра прокласти пряму лінію для огорожі так, щоб вона поділила куплену ними землю на дві рівні частини. Гарненько подумавши, землемір знайшов рішення. Однак, він виїхав з міста, так і не сказавши нікому, як він це зробив. А ви зможете пояснити жителям містечка, як землемірові вдалося це зробити?

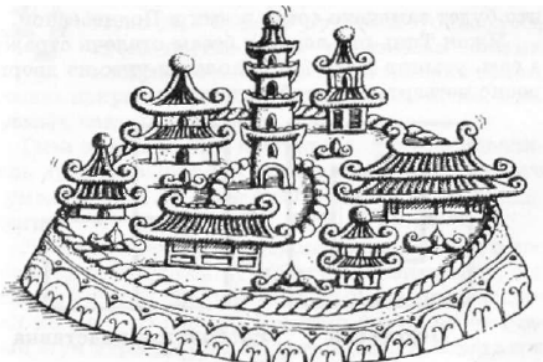


Відповідь:

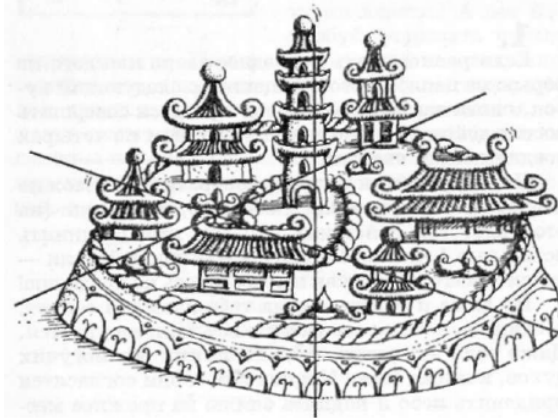
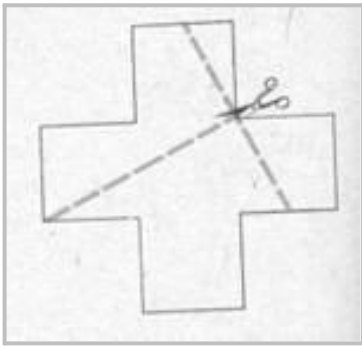


Задача 3. Розділи пиріг

Є пиріг, прикрашений 7 пагодами (священними будівлями Китаю). Розділіть його трьома прямими так, щоб на кожному шматку виявилось по одній пагоді.



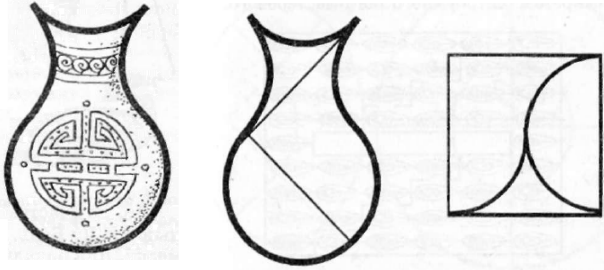
Відповідь:



Задача 4. Цегла із глечика

Є глечик, такий як на малюнку. За допомогою двох прямих розрізів розділіть його і з частин, що вийшли, складіть квадрат.

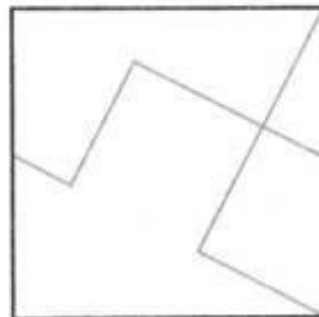
Відповідь:



Задача 4. Грецький хрест

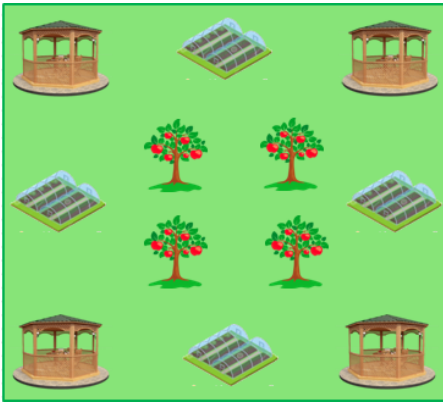
Назва цієї фігури пов'язана з тим, що стародавні греки креслили такий хрест на хлібах, вважаючи його символом життя. Виріжте з картону (або фанери) грецький хрест, розріжте його, як показано на малюнку, і складіть із частин, що вийшли, квадрат.

Відповідь:

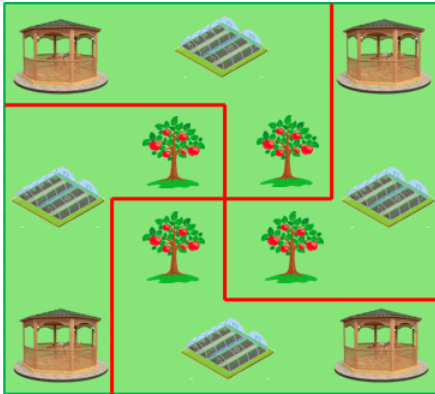
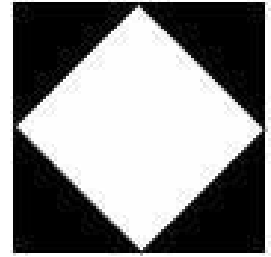


Задача 5. Фруктовий сад

Відомий садівник Леслі Браун заповів свій сад синам. Чотири сини повинні були поділити сад так, щоб кожна ділянка була однакової форми, однакового розміру й на кожній росло по три унікальних дерева. Сини впоралися із цим непростим завданням. А вам воно під силу?



Відповідь:



Задача 6. Фанерна головоломка

Власниця мебльованих кімнат Матуся Бо покликала місцевого майстра на всі руки Віллі Гвинта замінити частину підлоги в мансарді. Йому потрібно було закрити діру у два фути шириною й дванадцять футів довжиною. В машині у Гвинта лежав шматок фанери шириною в три фути й довжиною вісім футів. Будучи майстерним теслею, він зумів розрізати цей шматок на дві частини й закрити діру. Як йому це вдалося?

Відповідь:

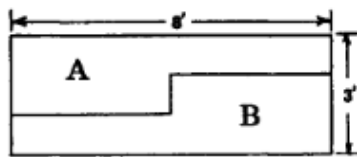


рис. 1

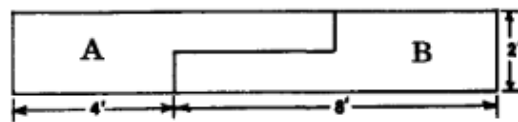


рис. 2

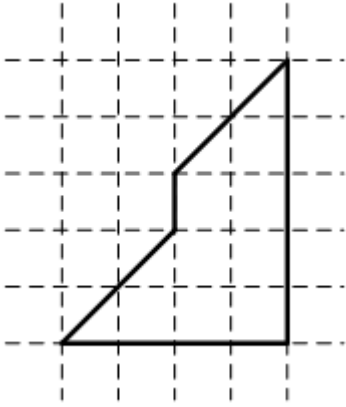
Задача 7. Квадратне вікно

В одного математика було квадратне вікно площею 1 м^2 , що пропускало занадто багато світла. Він загородив половину його, але при цьому в нього знову залишилося квадратне вікно в метр шириною й метр висотою. Як це могло вийти?

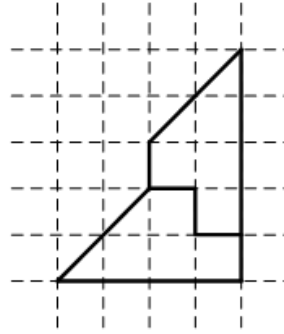
Відповідь: Власник загородив чотири кути, і в нього залишилося квадратне вікно вдвічі меншої площі, але в метр шириною й метр висотою.

Задача 8. З однієї фігури дві

Розріжте намальовану фігуру на дві однакові (співпадаючі при накладенні) частини.

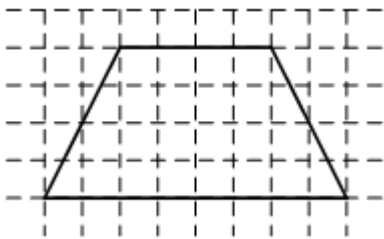


Відповідь:

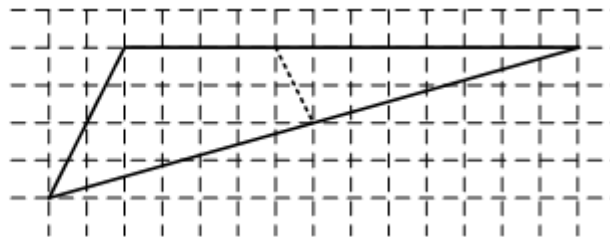
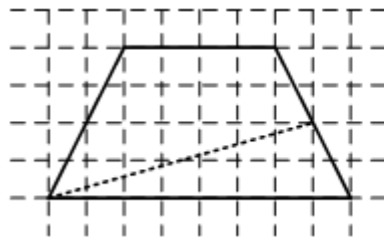


Задача 9.3 фігури – трикутник

Розріжте фігуру, зображену на рисунку, на дві частини, з яких можна скласти трикутник.

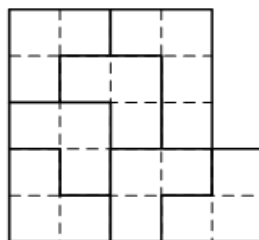
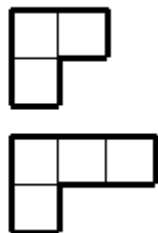
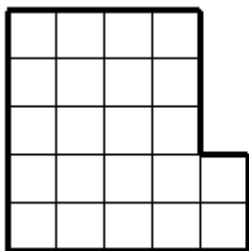


Відповідь:



Задача 10. Незнайкова фігура

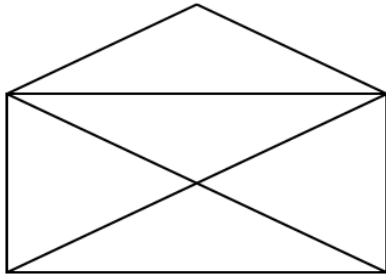
Незнайка розрізав фігуру на трикліткові та чотирьохкліткові куточки, намальовані праворуч від неї. Скільки трьохкліткових куточків могло вийти?



Відповідь: 6 куточків.

Задача 11. Фігура-конверт

Не відриваючи олівця від паперу та не проходячи жоден з відрізків двічі, зобразіть фігуру-конверт як на малюнку.

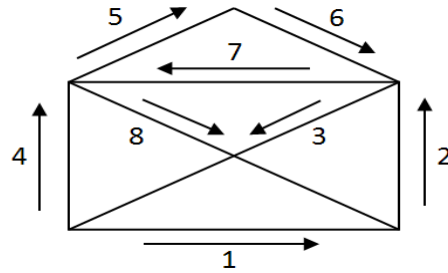
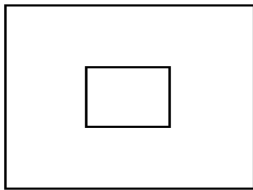


Відповідь.

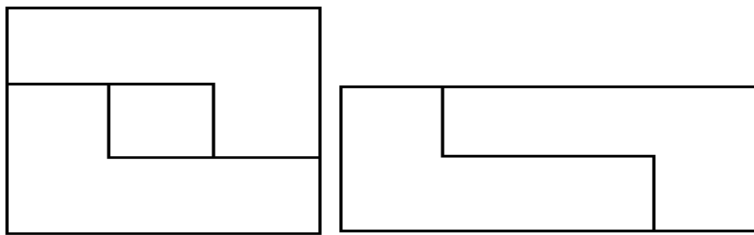
Задача 12.

Прямокутник з фігури

Розріжте цю фігуру на дві рівні частини так, щоб з них можна було скласти прямокутник.



Відповідь:



V. Підсумок заняття. Рефлексія.

VI. Домашнє завдання.

Придумати задачу на розрізання фігур.

ЛОГІЧНІ ЗАДАЧІ ЗАНЯТТЯ 29

Тема. Основні поняття логіки.

Мета:

формування предметних компетентностей: познайомити учнів з наукою логікою та її основними поняттями; формувати вміння розв'язувати логічні задачі;

формування ключових компетентностей: формувати вміння організовувати та планувати свою навчальну діяльність; формувати вміння виділяти головне в інформації; сприяти самовихованню толерантності, доброзичливості, принциповості;

розвивати: обчислювальні навички, логічне та просторове мислення;

виховувати: старанність, спостережливість, культуру математичної мови і графічних записів.

Математика належить до числа наук, що мають велике значення для відпрацювання вміння логічно мислити, робити узагальнення.

А. М. Колмогоров

ХІД ЗАНЯТТЯ

I. Організаційний момент.

Перевірити готовність учнів до заняття. Налаштувати їх на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання.

Перевірити якість виконання завдання. Відповісти на питання, які виникали в учнів під час виконання завдань.

III. Основна частина.

Дуже часто доводиться чути від учнів, що вони не розуміють, навіщо треба міркувати, доводити теореми. Що вертикальні кути рівні, — говорять вони, — і так видно. Що в рівнобедреного трикутника кути при основі рівні — цеце доказує креслення. Що ще тут міркувати? — дивуються вони. Учні дуже часто говорять, що теореми можна доводити рисунками.

Подивіться на рис. 1. Порівняйте довжини цих відрізків. Мабуть, ви скажете, що вертикальний відрізок довший. А тепер візьміть лінійку та виміряйте кожний. Бачите, ви помилилися, ці відрізки мають однакову довжину.



Рис. 1

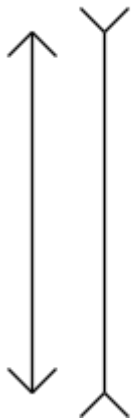


Рис. 2

Хочете спробувати ще? Розгляньте рис. 2 та порівняйте довжини відрізків.

Як бачите, рисунки можуть привести до помилкових висновків. Ви можете казати, що очам тепер не довіряєте, будете все вимірювати. Але вимірювання бувають неточними, та ще й інколи їх просто неможливо виконати.

Головне в іншому: можна виміряти один або декілька відрізків, один або декілька кутів тощо. Всі фігури потрібного виду розглянути неможливо. Тому треба вчитися правильно, логічно міркувати.

Логіка – це наука, яка вчить, як треба міркувати, щоб наше мислення було визначеним, зв'язним, послідовним, не містило протиріч та могло бути доведеним. Як людина, що не знайома з правилами арифметики та граматики, не може правильно рахувати і грамотно писати, так і людина, що не знає правил логіки, не може без помилок міркувати та діяти. Особливо багато таких логічних міркувань потрібно робити в математиці. Людині, що займається математикою, доводиться визначати поняття, виявляти зв'язки між ними, розглядати, які групи, числа, рівняння можна створити. Найбільш часто в математиці потрібно міркуваннями виводити різні формули, числові закономірності, правила, доводити твердження. Без логіки не може бути математики! А це означає, що для успішного вивчення математики треба наполегливо вчитися правильно міркувати. Саме вивчення математики дуже корисне для оволодіння правилами і законами мислення.

Розв'язування будь-якої математичної задачі – це ланцюжок міркувань. Обчислення, які необхідно використовувати, неможливі без логічних міркувань.

Ось, прикладу 1781 році була відкрита планета Уран. Спостереження показали, що рух цієї планети відрізняється від теоретично обчисленого руху. Французький учений Левер'є (1811 – 1877), логічними міркуваннями та виконавши досить складні обчислення, виявив вплив на Уран іншої планети та

вказав її місцезнаходження. У 1846 році астроном Гаям підтвердив існування нової планети, яка була названа Нептун. Тому вчимося логічно мислити!

Розглянемо задачі, що розвивають логічне мислення.

IV. Фізкультхвилинка.

V. Відпрацювання навичок та вмінь. Розв'язування задач.

Задача 1. В 12-поверховому будинку є ліфт. На першому поверсі живе всього 2 людей, від поверху до поверху кількість мешканців збільшується вдвічі. На якому поверсі в цьому будинку частіше інших натискається кнопка виклику ліфта?

Відповідь. На першому поверсі, незалежно від розподілу мешканців по поверхах.

Задача 2. Джордж Вашингтон, Шерлок Холмс, Вільям Шекспір, Людвіг Ван Бетховен, Наполеон Бонапарт і Нерон – хто з них принципово відрізняється від інших?

Відповідь. Шерлок Холмс – вигаданий персонаж.

Задача 3. Ковалю принесли п'ять ланцюгів, по три кільця в кожному, і доручили з'єднати їх в один ланцюг. Коваль вирішив розкрити чотири кільця й знову їх закувати. Чи не можна виконати ту ж роботу, розкривши менше кілець?

Відповідь. Можна розкрити три кільця одного ланцюга, а потім цими кільцями з'єднати чотири шматки, що залишилися.

Задача 4. Жили чотири друга. Вони мали імена Альберт, Карл, Дітріх і Фрідріх. Прізвища друзів ті ж, що й імена, тільки такі, що ні в кого з них ім'я й прізвище не співпадають, крім того, прізвище Дітріха не Альберт. Визначте прізвище й ім'я кожного хлопчика, якщо відомо, що ім'я хлопчика, у якого прізвище Фрідріх, є прізвищем того хлопчика, ім'я якого – прізвище Карл.

Відповідь. Перше слово – ім'я, друге слово – прізвище: Альберт Дітріх; Карл Альберт; Дітріх Фрідріх; Фрідріх Карл.

Задача 5. Три аматори водного спорту мають один човен. Вони винайшли спосіб, щоб ніхто зі сторонніх не міг його викрасти. Для цього вони тримають його на ланцюгу, що замикається трьома замками. Кожен з аматорів має тільки один ключ (всі ключі від різних замків), але все-таки він може взяти човен, використовуючи один тільки свій ключ. Як же в них це виходить?

Відповідь. Необхідно три замки з'єднати послідовно, тоді розмикаючи один із замків, буде розмикатися весь ланцюг.

Задача 6. Що не може збільшити лупа в трикутнику?

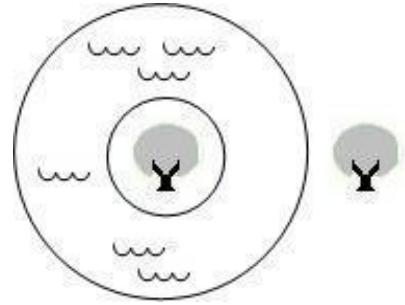
Відповідь. Кути.



Задача 7. Поруч із берегом стоїть корабель зі спущеною на воду мотузковою драбиною, що має 10 сходинок. Відстань між сходинками 30 см. Сама нижня сходинка торкається поверхні води. Океан сьогодні дуже спокійний, але починається приплив, що підіймає воду за годину на 15 см. Через скільки годин покриється водою третя сходинка мотузкової драбини?

Відповідь. Вода ніколи не покриє третьої сходинки, тому що разом з водою підіймаються й корабель і сходи.

Задача 8. В гостинний двір приїхав мандрівник. Грошей у нього із собою не було, але був срібний ланцюжок із шести ланок. Хазяїн готелю погодився прийняти в оплату номера за кожний день по одному кільцю з цього ланцюжка, але так, щоб розпиляних кілець він одержав не більше одного. Як мандрівникові варто розпиляти ланцюжок, щоб можна було розплачуватися з хазяїном щодня протягом п'яти днів?



Відповідь. Потрібно розпиляти третю ланку. Перший день він розплатиться розпиляною ланкою, у другий дасть дві ланки разом, а в решту одержить дану вчора розпиляну, у третій день, заплатив ланкою із трьох кілець, а його рештою буде заплачені їм учора дві ланки й так далі.

Задача 9. Діаметр глибокого круглого озера дорівнює 200 метрів, посеред озера знаходиться острів, на якому росте дерево. На березі також є дерево. Людина хоче потрапити з берега на острів, плавати вона не вміє, але в неї є мотузка довжиною трохи більше ніж 200 метрів. Як їй потрапити на острів за допомогою мотузки?



Відповідь. Людина може прив'язати один кінець мотузки до дерева на березі, а потім, тримаючи в руках інший кінець мотузки, обійти озеро навколо, після чого прив'язати до того ж дерева й інший кінець. Тепер між двома деревами натягнута подвійна мотузка, тримаючись за яку людина може перебраться на острів.

Задача 10. В одну склянку налили сік, а в іншу – таку ж кількість води. Зі склянки з соком беруть чайну ложку соку й переливають її в склянку з водою. Потім, добре перемішавши вміст склянки з водою, беруть чайну ложку розчину і переливають її назад у склянку з соком. Чого при цьому виявляється більше – соку у воді або води у соку?

Відповідь. Оскільки після двох переливань кількість рідини в обох склянках залишається однаковою, то кількість соку в одній склянці дорівнює кількості води в іншій.

Задача 11. Що більше: сума всіх цифр або їхній добуток?

Відповідь. Сума. Добуток буде рівним «0», тому що буде множення й на число «0».

Задача 12. Батько Микола із сином та батько Петро із сином відправилися ловити рибу. Число риб, пійманих Миколою, кінчається на 2, а число риб, пійманих його сином, – на 3, число риб, пійманих Петром, також закінчується на 3, а число риб, пійманих його сином, – на 4. Число риб, пійманих нашими рибалками разом, збігається із квадратом деякого натурального числа. Як кличуть сина Миколи?

Відповідь. Через те, що сума останніх цифр $2 + 3 + 3 + 4 = 12$ закінчується на 2 і не існує квадрата натурального числа, який би закінчувався на 2, то мова йде не про чотирьох, а лише про трьох рибалок, тобто син одного з любителів рибного лову одночасно є батьком іншого ($2 + 3 + 4 = 9$). Микола не може бути сином Петра, тому що улов Миколи закінчується на 2, а не на 4, як того вимагають умови завдання. Отже, Петро син Миколи.

Задача 13. Сер Роджер не тільки виглядає чепуруном, але й має репутацію відмінного фехтувальника. Одного разу, рано вранці, збираючись на чергову дуель, яких було так багато в його житті, він шукав пару панчіх одного кольору. Сер Роджер знав, що в нижньому ящику гардероба лежать десять пар білих панчіх і десять пар чорних, але світло єдиної свічки було таким тьмяним, що він не міг розібрати кольору. Визначте мінімальну кількість панчіх, яку повинен витягти з ящика сер Роджер, щоб підібрати пару однакових.

Відповідь. Серові Роджеру потрібно дістати три панчохи з нижнього ящика. Якщо перші дві панчохи підійдуть одна одній, – проблема вирішена. Якщо ж ні, то третя панчоха однаково підійде до однієї із двох. У будь-якому разі сер Роджер з'явиться на дуель у всій пишності та красі.

Задача 14. В хлопчика стільки ж сестер, скільки й братів, а в його сестри сестер вдвоє менше, ніж братів. Скільки в сім'ї сестер і братів?

Відповідь. Три сестри й чотири брати.

Задача 15. Щоб знайти піратський скарб треба пройти від старого дуба 12 кроків на північ і 5 кроків на південь, потім 4 на північ і 11 на південь. Де заритий скарб?

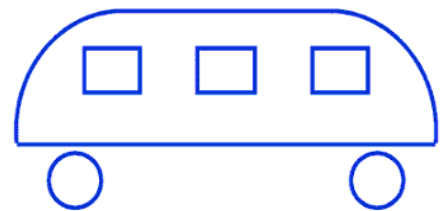
Відповідь. Біля старого дубу.

Задача 16. На гілці сиділо три пташки, дві вирішило полетіти. Скільки залишилося сидіти на гілці пташок?

Відповідь. Три пташки. Рішення ще не дія, пташки вирішили полетіти, але ще не полетіли.

Задача 17. Визначте в яку сторону їде автобус на рисунку: вліво чи вправо? Діти із дитсадка майже миттєво на неї правильно відповідають! А ви вже здогадались?

Відповідь. Автобус їде вліво. Тому що, якби він їхав вправо, було б видно вхідні двері!



Задача 18. Ви їдете в авто і на одній зупинці бачите трьох людей: 1) стареньку бабцю, якій негайно потрібно до лікарні інакше вона помре, 2) свого старого товариша, котрий колись врятував вам життя і який запізнюється у дуже важливій для нього справі та 3) дівчину (хлопця) своєї мрії. У вашому авто, крім вашого місця є ще одне (ви не можете взяти з собою більше однієї людини). Кого ви оберете, як ви вчините?

Відповідь. Віддам машину товаришу – нехай рятує бабцю і себе, а сам залишуся з дівчиною своєї мрії.

Задача 19. Що можна взяти в ліву руку, але не можна взяти в праву?

Відповідь. Правий лікоть.

Задача 20. Містер Джонс був знайдений мертвим за письмовим столом у своєму кабінеті. Причина смерті – кульове поранення в голову. Детектив Бонс, який прибув на місце події, серед інших предметів звернув увагу на магнітофон, який лежав на столі. Включивши магнітофон, він, на своє здивування, почув голос містера Джонса, який зробив наступну заяву: «Говорить Джонс. Тільки що мені подзвонив Сміт. Сказав, що їде сюди, щоб пристрелити мене. Бігти безглуздо, та й пізно. Якщо він всерйоз вирішив здійснити свою погрозу, то через 10 хвилин я буду мертвий. Цей запис допоможе поліції знайти вбивцю. Я чую його кроки на сходах. Двері відкриваються...». На цьому запис перервався, Бонс виключив магнітофон.



- Може, заарештувати Сміта? - запитав лейтенант Вонг, помічник капітана Бонса.

- Ні, — відрізав Бонс. - Перекоаний, що вбивство зробив хтось інший, хто вміє добре наслідувати голос Джонса. Запис зроблений спеціально для того, щоб направити розслідування по хибному шляху.

Як показали наступні події, Бонс мав рацію. Що змусило його запідозрити що тут щось не те?

Відповідь. Відгадка в тому, що касета в магнітофоні була перемотана на початок. Мертвий не міг перемотати касету, а вбивця якби знав про касету просто забрав би її і знищив. Це і викликало підозру у детектива Бонса.



Задача 21. В одній в'язниці у всесвітній день ув'язнених влаштували конкурс-гру. У грі беруть участь усі в'язні і у разі виграшу адміністрація обіцяє всіх їх відпустити. Ось у чому полягає гра: всіх в'язнів садовлять окремо у різні камери. Потім одного з в'язнів випускають і ведуть в спеціальний карцер з лампочкою. Ніхто з в'язнів не знає і не може підглядіти кого саме в той карцер ведуть. У спеціальному карцері є 1



лампочка і в'язень має право включити/виключити/залишити без змін лампочку. Потім його знову замикають в його карцері і беруть довільного іншого в'язня (це може бути і той самий).

Так гра продовжується цілий день. В'язні виграють, якщо якийсь із в'язнів вийде зі спеціального карцеру і скаже «тут вже були всі в'язні» і це буде правдою, інакше, якщо це неправда, гра закінчується. Перед початком гри в'язні можуть обговорити між собою стратегію гри, але під час гри ніхто ні з ким не може спілкуватись. На початку лампочка виключена.

Задача цілком на логіку, не має ніяких приколів типу залишити якийсь знак в спецкарцері, або на дотик визначити скільки працює лампочка...

Допоможіть в'язням вибратися з тюрми!

Відповідь. Їм необхідно зробити так:

1) Зі 100 в'язнів вибрати (за домовленістю) 1-го.

2) Цей в'язень кожен раз, коли заходить в карцер, вмикає лампочку та рахує кількість (скільки раз вмикав), а якщо лампочка вже горить, то її не вмикає.

3) Будь-який із 99 інших в'язнів вмикає лампочку, якщо вона горить, запам'ятовує, що він вже виключав лампочку і більше не виключає її. І от коли перший нарахує 100, сміливо може сказати: «Ми виграли».



Задача 22. На сході один старий, вмираючи, заповів трьом своїм синам 19 верблюдів. Старшому синові за заповітом повинна була дістатися половина верблюдів, середньому – чверть, і молодшому – п'ята частина. Але брати стали сперечатися між собою, адже 19 верблюдів не ділиться, ні на 3, ні на 4, ні на 5. Пішли вони до мудреця, у якого теж були верблюди. І мудрець зміг розсудити їх, і начебто б кожний залишився при своїй частці. Як розділив верблюдів мудрець?



Відповідь. 10 верблюдів старшому (це половина від 20 верблюдів), 5 – середньому (це одна четверта від 20) і 4 – молодшому (це одна п'ята від 20): $10 + 5 + 4 = 19$. А одного верблюда мудрець додав, щоб усіх розділити (тим більше він у нього і залишився).

Задача 23. Мерлін, великий і мудрий чарівник при дворі короля Артура, любив наступну загадку: оберіть чотири монетки й розташуйте їх таким чином, щоб усі вони були на рівній відстані одна від одної. (Якщо у вас під рукою немає англійських монеток, згодяться будь-які інші).

Відповідь. Розташуйте три монети трикутником так, щоб кожна монета торкалась двох інших. Потім кладете в центр четверту монету на три інші. Оскільки кожна монета торкається інших, виходить, усі монети перебувають на рівній відстані одна від одної.

VI. Підсумок заняття. Рефлексія.

VII. Домашнє завдання.

1. Летіли гуси, а назустріч один: «Добрідень, сто гусей!» - каже. Нас не сто, а щоб було сто, треба ще стільки, та півстільки, та чверть стільки і ще ти, то аж тоді буде сто». Скільки було гусей?

2. Яке хлоп'яче ім'я можна однаково читати з обох боків, вперед і навиворіт?
3. Коли людина в кімнаті буває без голови?
4. Що спершу треба зробити, лягаючи спати?
5. У млині було вісім мішків, на кожному мішку сиділо по дві миші, прийшов мельник з котом, скільки тепер стало ніг?
6. На дереві сиділа зграйка горобців, стрілець вистрілив – один упав. Скільки залишилось горобців?
7. В яку бочку не можна налити води?
8. Серед горба осел, з одного боку горба вогонь горить, з другого ліс густий, з третього глибоке озеро. Лісом піти – осел роги ламає, вогнем – згорить, через озеро – не вміє плавати, утопитися. Куди ослові пройти?
9. Одного батька і одної матері дитина, а нікому з них не син.
10. Коли дурень розумний?
11. Ішло дві матері і дві дочки. Знайшли три яблука і поділились. Кожній дісталось по одному. Як так вийшло?
12. Хто найчастіше оглядається?
13. Летів гурт голубів, і стояли дуби; як сядуть по два – один дуб гуляє, як сядуть по одному – то дуба не вистачає. Скільки було голубів і дубів?
14. Який острів каже, що він одяг?
15. Сорок, п'ять і сорок п'ять – скільки буде?
16. Що стоїть посередині Полтави?
17. Якщо машина їде, яке в неї колесо не крутиться?
18. Від чого у качки ноги червоні?
19. Що дістане зубами потилицю?
20. Де вода стоїть стовпом?
21. Яке море не має води?
22. Якою косою не можна косити?
23. Складіть віршика з шести літер.
24. Чи можливо, щоб одна та одна було одинадцять?
25. Чоловік їде у вагоні і йому сниться, що він сидить на підлозі, а дошки летять у безодню. Чоловік лишився на одній дошці, що йому треба зробити, аби не впасти.
26. Жило триста котів і один чоловік. Скільки було там ніг?
27. Що тепліше за одного кожуха?
28. Хто показує кожному його обличчя, бо не має власного?
29. Як написати «м'ясо без кісток», щоб було чотири букви?
30. На небі одна, на землі немає, у баби дві, у дівки немає.
31. Що важче: пуд пир'я чи пуд заліза?
32. Без чого хату не можна збудувати?
33. Коли ми дивимось на число «два», а кажемо «десять»?

Відгадки: 1. Тридцять шість. 2. Пилип. 3. Коли виставить голову у вікно. 4. Сісти. 5. Дві ноги мельника. 6. Один, той, що впав. 7. У повну. 8. Лісом, бо в нього ріг нема. 9. Дочка. 10. Як мовчить. 11. Ішли бабуся, дочка, онука. 12. Злодій. 13. Чотири голуби і три дуби. 14. Ямайка. 15. Вісімдесят п'ять.

16. Літера «Т». 17. Запасне. 18. Від колін. 19. Гребінець. 20. У склянці, у пляшці. 21. Те, що на географічній карті. 22. Дівочою. 23. Віршик. 24. Як написати одну коло одної. 25. Прокинутись. 26. Дві, бо у kota — лапи. 27. Два кожухи. 28. Дзеркало. 29. Язик. 30. Літера „Б». 31. Однаково. 32. Без стуку. 33. Коли годинникова стрілка показує десять хвилин.

ЗАНЯТТЯ 30–31

Тема. Логічні запитання. Логічні таблиці.

Мета:

- ⇒ **формування предметних компетентностей:** відпрацьовувати навички розв'язування задач на складання таблиць істинності;
- ⇒ **формування ключових компетентностей:** формувати вміння розв'язувати задачі на логіку, виділяти головне в інформації; сприяти самовихованню толерантності, доброзичливості, принциповості;
- ⇒ **розвивати:** обчислювальні навички, логічне та просторове мислення;
- ⇒ **виховувати:** старанність, спостережливість, культуру математичної мови і графічних записів.

ХІД ЗАНЯТТЯ

I. Організаційний момент.

Перевірити готовність учнів до заняття. Налаштувати їх на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання.

Перевірити якість виконання завдання. Відповісти на питання, які виникли в учнів під час виконання завдань.

III. Основна частина.

V. Відпрацювання навичок та вмінь. Розв'язування задач.

Задача 1. Стіл має 4 кути. Один кут спиляли. Скільки кутів залишилося?

Відповідь: залишилося 5 кутів.

Задача 2. Розмовляють троє: Біленко, Черняк і Руденко. Брюнет сказав Біленкові: «Цікаво, що один з нас білявий, другий – брюнет, а третій – рудий, але у жодного з нас колір волосся не співпадає з прізвищем». Який колір волосся мають співрозмовники?



Розв'язання.

Складемо таблицю та відмітимо в ній кожне твердження знаком «+» або «—».

		Біленко	Черняк	Руденко
білявий		—	+	—
брюнет		—	—	+
рудий		+	—	—

Відповідь: Біленко – рудий, Черняк – білявий, Руденко – брюнет.

Задача 3. Олександр, Борис, Віктор і Григорій – друзі. Один з них – лікар, інший – журналіст, третій – спортсмен, а четвертий – будівельник. Журналіст написав статтю про Олександра і Григорія. Спортсмен і журналіст разом з Борисом ходили в похід. Олександр і Борис були на прийомі у лікаря. У кого яке прізвище?



Розв'язання.

Складемо таблицю та відмітимо в ній кожне твердження знаком «+» або «-».

	Олександр	Борис	Віктор	Григорій
лікар	-	-	-	+
журналіст	-	-	+	-
спортсмен	+	-	-	-
будівельник	-	+	-	-

Відповідь. Олександр – спортсмен, Борис – будівельник, Віктор – журналіст, Григорій – лікар.

Задача 4. У колі сидять четверо друзів : Бондар, Петренко, Ковтун і Павленко. Їх імена: Андрій, Сергій, Тимофій і Олексій. Відомо, що Бондар не Олексій і не Андрій; Сергій сидить між Ковтуном і Тимофієм; Павленко не Сергій і не Олексій; Петров сидить між Карповим і Андрієм. Назвіть ім'я та прізвища кожного з хлопців.

Розв'язання.

Складемо таблицю та відмітимо в ній кожне твердження знаком «+» або «-».

	Андрій	Сергій	Тимофій	Олексій
Бондар	-	+	-	-
Петренко	-	-	-	+
Ковтун	+	-	-	-
Павленко	-	-	+	-

Відповідь. Андрій Ковтун, Сергій Бондар, Тимофій Павленко, Олексій Петренко.

IV. Фізкультхвилинка.

Задача 5. На вулиці розмовляють чотири дівчинки: Дарина, Катя, Галя і Ніна. Дівчинка в червоній сукні (не Дарина і не Катя) стоїть між дівчинкою в блакитній сукні і Ніною. Дівчинка в сірій сукні стоїть між дівчинкою в рожевій сукні і Катею. Якого кольору сукня була в кожній дівчинки?



Розв'язання.

Складемо таблицю та відмітимо в ній кожне твердження знаком «+» або «-».

	Дарина	Катя	Галя	Ніна
Червона сукня	-	-	+	-
Блакитна сукня	-	+	-	-
Сіра сукня	+	-	-	-
Рожева сукня	-	-	-	+

Відповідь. Галя – в червоній, Катя – в блакитній, Дарина – в сірій, Ніна – в рожевій сукнях.

Задача 6. У черзі за квитками в кіно стоять друзі: Юра, Мишко, Володя, Саша і Олег. Відомо, що Юра купить квиток раніше, ніж Мишко, але пізніше Олега; Володя і Олег не стоять поруч, а Саша не перебуває поруч ні з

Олегом, ні з Юрою, ні з Володею.

Хто за ким стоїть?

**Розв'язання.**

Складемо таблицю та відмітимо в ній кожне твердження знаком «+» або «-».

	Юра	Мишко	Володя	Саша	Олег
Перший	-	-	-	-	+
Другий	+	-	-	-	-
Третій	-	-	+	-	-
Четвертий	-	+	-	-	-
Останній	-	-	-	+	-

Відповідь. Олег, Юра, Володя, Мишко, Саша.

VI. Підсумок заняття. Рефлексія.**VII. Домашнє завдання.**

1. В одному дворі живуть четверо друзів. Вадим і шофер старше Сергія; Микола і слюсар займаються боксом; електрик – молодший з друзів; вечорами Антон і токар грають в доміно проти Сергія і електрика. Визначте професію кожного з друзів.

Відповідь. Вадим – токар, Сергій – слюсар, Микола – електрик, Антон – шофер.

2. Клоуни Жан, Жульєн і Жерар вийшли на циркову арену в червоній, блакитній й зеленій сорочках. Їх туфлі були таких самих трьох кольорів. Туфлі і сорочка Жульєна були одного кольору. На Жерарові не було нічого червоного.

Туфлі Жана були зелені, а сорочка – ні. Яких кольорів були туфлі і сорочка в Жерара й Жульєна?

Відповідь. У Жерара – блакитні туфлі й зелена сорочка, у Жульєна – червоні туфлі й сорочка.

3. У родині четверо дітей. Їм 5,8,13 і 15 років. Дітей звать Аня, Юрко, Таня й Галя. Скільки років кожній дитині, якщо одна дівчинка ходить у дитячий садочок, Аня старша за Юрка й сума років Ані й Тані ділиться на три?

Відповідь. Ані – 13 років, Юркові – 8 років, Тані – 5 років, Галі – 15 років.

4. Коля, Борис, Вова і Юра зайняли перші чотири місця в змаганні, причому ніякі два хлопчики не ділили між собою якісь місця. На питання, хто яке місце зайняв, Коля відповів: «Ні перше, ні четверте»; Борис сказав: «Друге», а Вова помітив, що він був не останнім. Яке місце зайняв кожен із хлопчиків?

Відповідь. Коля – третій, Борис – другий, Вова – перший, Юра – останній.

ЗАНЯТТЯ 32–33

Тема. Задачі, що розв'язуються з кінця.

Мета:

- ⇒ **формування предметних компетентностей:** познайомити з видом задач, що розв'язуються з кінця; формувати вміння та відпрацьовувати навички розв'язування такого типу задач;
- ⇒ **формування ключових компетентностей:** формувати вміння організовувати та планувати свою навчальну діяльність; формувати вміння виділяти головне в інформації; сприяти самовихованню толерантності, доброзичливості, принциповості;
- ⇒ **розвивати:** обчислювальні навички, логічне мислення; **виховувати:** старанність, спостережливість, культуру математичної мови і графічних записів.

ХІД ЗАНЯТТЯ

I. Організаційний момент.

Перевірити готовність учнів до заняття.

Налаштувати їх на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання.

Перевірити якість виконання завдання. Відповісти на питання, які виникли в учнів під час виконання завдань.

III. Основна частина.

В математиці існує багато типів задач та способів їх розв'язання. Так тип задач, що розв'язуються з кінця, має свою особливість. Зокрема, під час їх розв'язування, необхідно виконувати умову задачі, починаючи з її кінця. Наведемо приклади.

IV. Відпрацювання навичок та вмінь. Розв'язування задач.

Задача 1. Магія чисел.

Я задумав число, додав до нього 5, потім поділив суму на 3, помножив на 4, відняв 6, поділив на 7 і отримав число 2. Яке число я задумав?

Розв'язання.

Розв'язуємо задачу з кінця:

- 1) $2 \cdot 7 = 14$ – число до ділення на 7.
- 2) $(14 + 6) : 4 = 5$ – число до множення на 4.
- 3) $5 \cdot 3 = 15$ – число до ділення на 3.
- 4) $15 - 5 = 10$ – шукане число.

Відповідь. Задумане число 10.

Задача 2. Яблука.

Троє хлопчиків мають деяку кількість яблук. Перший хлопчик дає іншим стільки яблук, скільки кожний із них має. Потім другий хлопчик дає двом іншим стільки яблук, скільки кожний із них має тепер; а третій дає кожному із двох стільки, скільки є у кожного в цей момент. Після



чого у кожного хлопчика виявляється по 8 яблук. Скільки яблук було у хлопчиків спочатку?

Розв'язання. Розв'язуємо задачу з кінця за допомогою таблиці.

Номер хлопчика	1	2	3
Число яблук в кінці	8	8	8
Число яблук до передачі їх третім хлопчиком	$8 : 2 = 4$	$8 : 2 = 4$	$8 + 8 + 4 = 16$
Число яблук до передачі їх другим хлопчиком	$4 : 2 = 2$	$4 + 2 + 8 = 14$	$16 : 2 = 8$
Число яблук спочатку	$2 + 4 + 7 = 13$	$14 : 2 = 7$	$8 : 2 = 4$

Таким чином, спочатку яблук у першого, другого і третього хлопчиків було відповідно 13, 7 і 4.

Відповідь: 13 яблук, 7 яблук, 4 яблука.

Задача 3. Чорт і ледар.

Одного разу чорт запропонував ледарю заробити. «Як тільки ти перейдеш через цей міст, – сказав він, – твої гроші подвояться. Можеш переходити по ньому скільки хочеш разів, але після кожного переходу віддавай мені за це 24 копійки». Нероба погодився і ... після третього переходу залишився без грошей. Скільки грошей у нього було спочатку?



Розв'язання. Оскільки після третього переходу у ледаря грошей не залишилося, то після переходу моста в третій раз у нього було 24 коп., а до переходу мосту в третій раз 12 коп. Тоді після переходу моста вдруге у ледаря було $12 + 24 = 36$ (коп.), а до переходу моста – $36 : 2 = 18$ (коп.). Міркуючи аналогічно, отримаємо, що після переходу моста першого разу у ледаря стало $18 + 24 = 42$ (коп.), а до першого переходу моста було – $42 : 2 = 21$ (коп.). Таким чином, у ледаря спочатку було 21 копійка.

Відповідь. 21 копійка.

Задача 4. Туристи.

Група туристів вирушила в похід. У перший день вони пройшли $\frac{1}{3}$ шляху, в другій – $\frac{1}{3}$ залишку, в третій – $\frac{1}{3}$ нового залишку. В результаті їм залишилося пройти 32 км. Скільки кілометрів становив маршрут туристів?



Розв'язання. Оскільки залишилося пройти 32 км, а в третій день туристи пройшли залишок, то 32 км становитимуть $\frac{2}{3}$ останнього залишку, тоді сам останній залишок буде дорівнює $32 : \frac{2}{3} = 48$ (км). Ці 48 км становитимуть $\frac{2}{3}$

довжини маршруту, що залишилося пройти після першого дня. Тоді весь маршрут, який залишилося пройти, буде дорівнює $48 : \frac{2}{3} = 72$ (км). Ці 72 км знову складають $\frac{2}{3}$, але вже всього маршруту туристів, а значить, весь маршрут буде дорівнює $72 : \frac{2}{3} = 108$ (км).

Відповідь. 108 км.

Задача 5.Тарілка слив.

Мати для трьох синів залишила вранці тарілку слив, а сама пішла на роботу. Першим прокинувся старший син. Побачивши на столі сливи, він з'їв їх третю частину й пішов. Другим прокинувся середній син. Думаючи, що його брати ще сплять, він з'їв третину того, що було на тарілці, й теж пішов. Найпізніше встав молодший син. Побачивши сливи, він вирішив, що брати ще не їли їх, і тому з'їв лише третину того, що було на тарілці. Після цього залишилося 8 слив. Скільки всього слив було спочатку?

Розв'язання. Оскільки молодший брат з'їв третину, то залишилося дві третини, які становлять 8 слив. $8 : 2 \cdot 3 = 12$ (слив) залишив середній брат. Це дві третини від того, що залишив старший брат. $12 : 2 \cdot 3 = 18$ (слив) залишив старший брат. Своєю чергою, це дві третини від того, що залишила мама.

$18 : 2 \cdot 3 = 27$ (слив) – залишила мама.

Відповідь. 27 слив.

Задача 6.Селянин і цар.

Селянин прийшов до царя і попросив: «Цар, дозволь мені взяти одне яблуко з твого саду». Цар йому дозволив. Пішов селянин до саду і бачить: весь сад обгороджений потрійним парканом. Кожен паркан має лише одні ворота, і біля кожних воріт стоїть охоронець. Підійшов селянин до першого охоронця і каже: «Цар дозволив мені взяти одне яблуко з саду». «Візьми, але, виходячи з саду, повинен будеш віддати мені половину яблук, що візьмеш, і ще одне», – поставив умову охоронець. Це ж саме повторили йому другий і третій охоронці, що стояли біля інших воріт. Скільки яблук повинен узяти селянин, щоб після того, як віддасть яблука трьом охоронцям, у нього залишилося одне яблуко?

Розв'язання. Перед останніми, третіми, воротами у селянина має залишитися $(1 + 1) \cdot 2 = 4$ (яблука), перед другими – $(4 + 1) \cdot 2 = 10$ (яблук), і перед першими – $(10 + 1) \cdot 2 = 22$ (яблука).

Відповідь. 22 яблука.

Задача 7.Лілія на озері.

На озері розцвіла лілія. Кожен день число квіток подвоювалося і на 20-й день все озеро вкрилося квітами. За скільки днів покрилася квітами половина озера?



Розв'язання. Розв'язувати почнемо з кінця. Оскільки кожен день число квіток подвоюється, а на 20-й день все озеро вкрилося квітами, то половина озера була покрита квітами за один день до того, тобто на 19-й день.

Відповідь. За 19 днів.

V. Підсумок заняття. Рефлексія.

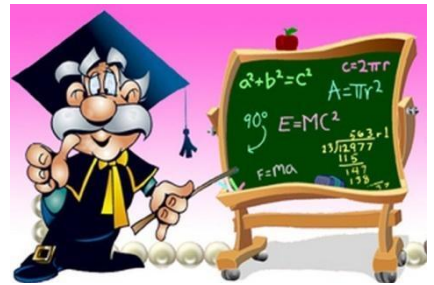
VI. Домашнє завдання.

1. На свято купили торт. Але їли його дуже цікаво – до торта підходив чоловік і з'їдав половину того, що залишилося. Всього торт їли 5 осіб, а Миколці, який прийшов останнім (п'ятим), віддали все, що залишилося – пів кіло торта. Скільки важив торт на початку?

2. Це старовинна задача. Селянка прийшла на базар продавати яйця. Перша жінка-покупець купила у неї половину всіх яєць і ще половину яйця. Друга придбала половину решти яєць і ще половину яйця. Третя купила всього одне яйце. Після цього у селянки не залишилося нічого. Скільки яєць вона принесла на базар?



3. Завдання з книги «Арифметика» Леонтія Магніцького. Батько вирішив віддати сина в навчання і запитав вчителя: «Скажи, скільки учнів у тебе в класі?» Учитель відповів: «Якщо прийде ще учнів стільки ж, скільки маю, і півстільки, і четверта частина, і твій син, тоді буде у мене сто учнів». Скільки ж учнів було в класі?



4. Мати купила яблука. Два з них взяла собі, а решту поділила між трьома своїми синами. Першому вона дала половину всіх яблук і половину яблука, другому – половину залишку і ще половину яблука, третьому – половину нового залишку і половину яблука. Скільки яблук купила мати, і скільки яблук отримав кожен із синів?



5. Поставили самовар, а потім 7 разів сідали пити чай і кожен раз випивали половину наявної в ньому води. Виявилось, що після цього залишилась всього склянка води. Скільки води було в самоварі перед чаюванням?



6. Я задумав число, відняв 57, розділив на 2 і отримав 27. Яке число я задумав?

7. Незнайко прогуляв $\frac{1}{4}$ уроку. На наступного дня він прогуляв половину уроку. Кожен день кількість прогуляних уроків збільшувалася в два рази. На десятий день він вперше прогуляв всі уроки. На який день він прогуляв чверть уроків, якщо їх кількість щодня однакова.





8. Хуліган Микита на занятті вкрав багато сірників. По дорозі інші хлопці побачили його і кожен забрав у нього кілька. Сашко забрав третину, Василь – третину залишку, Григорій – ще третину залишку, Анатолій – теж третину залишку. В результаті Микита спалив 16 сірників, і у нього після цього сірників не залишилося. Скільки у нього було сірників спочатку?



9. Три хлопчики поділили 120 цукеркових обгортток. Спочатку Петя дав Вані і Толі стільки обгортток, скільки у них було. Потім Ваня дав Толі і Петі стільки обгортток, скільки у них стало. І, нарешті, Толя дав Петру і Вані стільки, скільки у них до цього моменту було. В результаті всім дісталось порівну. Скільки цукеркових обгортток було у кожного спочатку?



ЗАНЯТТЯ 34 – 35

Тема. Софізми.

Мета:

- ⇒ **формування предметних компетентностей:** ознайомити учнів з поняттям софізм; формувати вміння розв'язувати задачі на софізми;
- ⇒ **формування ключових компетентностей:** формувати вміння організовувати та планувати свою навчальну діяльність, виділяти головне в досліджуваному матеріалі; сприяти самовихованню толерантності, доброзичливості, принциповості;
- ⇒ **розвивати:** обчислювальні навички, логічне та просторове мислення;
виховувати: старанність, спостережливість, культуру математичної мови і графічних записів.

*Тисячі шляхів ведуть до помилки,
до істини – тільки один.*

Жан-Жак Руссо

ХІД ЗАНЯТТЯ

I. Організаційний момент.

Перевірити готовність учнів до заняття. Налаштувати їх на роботу.

II. Перевірка домашнього завдання.

Перевірити якість виконання завдання. Відповісти на питання, які виникли в учнів під час виконання завдань.

III. Основна частина.

Софізм — це міркування, яке формально здається абсолютно бездоганим, але насправді містить помилку, в результаті чого кінцевий висновок є абсурдним.

Вміння вести суперечку.

Ця ідея зародилась в Стародавній Греції. Софісти навчали людей вести суперечку з метою довести свою думку за допомогою завідомо неправдивих аргументів, які виглядали, як правдоподібні. Наприклад, «Те, чого ти не втратив, у тебе є. Ти не втратив роги, значить, у тебе вони є», «Напівпорожнє відро – те ж саме, що і напівповне. Значить, порожнє відро – те ж саме, що і повне».



IV. Відпрацювання навичок та вмінь. Розв'язування софізмів.

Задача 1. П'ять дорівнює шести.

Візьмемо тотожність $35 + 10 - 45 = 42 + 12 - 54$. У кожній частині цієї тотожності винесемо за дужки спільний множник: $5 \cdot (7 + 2 - 9) = 6 \cdot (7 + 2 - 9)$. Тепер, розділивши обидві частини отриманої рівності на їх спільний множник $(7 + 2 - 9)$, отримаємо, що $5 = 6$. Де помилка?

Відповідь: $7 + 2 - 9 = 0$, а на нуль ділити не можна.

Задача 2. Чотири дорівнює п'яти

Розглянемо правильну числову рівність: $4 : 4 = 5 : 5$. Винесемо за дужки спільний множник $4(1 : 1) = 5(1 : 1)$. Звідси $4 = 5$. Де помилка?

Відповідь: не правильно винесено за дужки спільний множник, оскільки

$$4 : 4 = 4 \cdot \frac{1}{4} \text{ та } 5 : 5 = 5 \cdot \frac{1}{5} .$$

Задача 3. 3 «Арифметики» М. П. Магніцького

Дехто продав коня за 156 крб. Однак покупець, придбавши коня, передумав його купувати і повернув продавцеві, кажучи:

– Нема рації мені купувати за цю ціну коня, бо він таких грошей не вартий.

Тоді продавець запропонував інші умови:

– Якщо, на твою думку, ціна коня надто велика, то купи лише цвяхи, що у його підковах, а коня дістанеш на додачу безплатно. Цвяхів у кожній підкові 6.



За перший цвях дай мені лише $\frac{1}{4}$ копійки, за другий – $\frac{1}{2}$ копійки, за третій 1 копійку і т. д.

Покупець, спокушений низькою ціною, бажаючи даром дістати коня, прийняв умови продавця, розраховуючи, що за цвяхи доведеться заплатити не більше як 10 карбованців. Скільки повинен заплатити покупець?

Відповідь: за 24 цвяхи довелось заплатити $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{24-3}$ копійок.

$$\text{Сума ця дорівнює } \left(2^{21} \cdot 2 - \frac{1}{4} \right) : (2 - 1) = 2^{22} - \frac{1}{4} = 4194303 \frac{3}{4} \text{ коп.}$$

Це майже 42 тисячі. При таких умовах не прикро і дати коня на додачу.

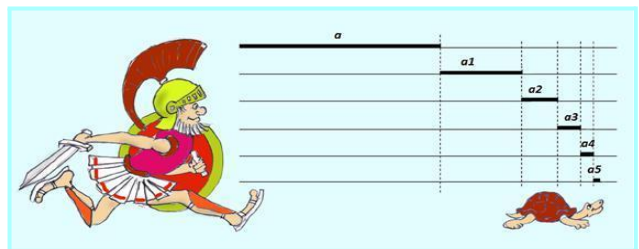
Задача 4. Ахіллес і черепаха

Ахіллес, що біжить в 10 разів швидше за черепаху, не зможе її наздогнати.

Нехай черепаха на 100 м попереду Ахіллеса. Коли Ахіллес пробіжить ці 100 м, то черепаха буде попереду нього на 10 м. Пробіжить Ахіллес ці 10 м, то черепаха буде попереду на 1 м і т. д. Відстань між ними весь час скорочується, але ніколи не перетвориться в нуль.

Отже, Ахіллес ніколи не наздожене черепаху.

Відповідь: розв'язання цієї апорії Зенона викликає дискусії до сьогодення. Одним із можливих пояснень парадокса є хибні уявлення про нескінченну подільність відстані і часу. Приклад з Ахіллесом і черепахою



вказує на парадокс самої життєвої ситуації. Він цікавий для дітей. Задача обов'язково запам'ятається і дасть привід для логічних роздумів.

Задача 5. Не знаєш те, що знаєш

- Чи знаєш ти те, про що я хочу тебе запитати?
- Ні.
- Чи знаєш ти, що добродесність є добро?
- Знаю.
- Про це я й хотів тебе запитати. А ти, виходить, не знаєш

те, що знаєш.

Задача 6. Ліки

Ліки, що приймаються хворим, є добро. Чим більше робити добра, тим краще. Значить, ліків потрібно приймати якомога більше.

Задача 7. Злодій

Злодій прагне отримати все найкраще. Бажання отримати найкраще – це добра справа. Отже, злодій робить добру справу.

Задача 8. Рогатий

Чи є у тебе те, що ти не втрачав? Звичайно є. Ти роги не втрачав, значить вони в тебе є.

Задача 9. Софізм «Хитрий менеджер»

Три дівчинки накопичили трохи грошей і вирішили придбати на трьох одну книжку, яка коштує 30 грн. Дівчатка скинулися по 10 грн і купили товар. Трохи згодом менеджер магазину довідався, що книжка коштує 25 грн і забрав із каси 5 грн. Менеджер мав віддати гроші дівчаткам, але як поділити 5 грн на трьох? Менеджер вирішив не ламати довго голову і віддав кожній дівчинці по 1 грн (отже, усього 3 грн), а 2 грн взяв собі. Отже, кожна дівчинка одержала назад по 1 грн, тобто замість 10 витратила 9 грн.

Нескладно порахувати, у скільки обійшлася дівчаткам книжка, – у $9 \cdot 3 = 27$ грн. Якщо до цих грошей додати ще 2 грн, які менеджер поклав собі у кишеню, отримаємо 29 грн. Куди зникла тридцять гривень?

Пояснення: ми рахуємо, скільки грошей було витрачено. Логічно буде сказати, що менеджер забрав у дівчат 2 грн. Оскільки $9 \cdot 3 = 27$, а книжка коштує 25 грн, не вистачає 2 грн. Тому додавати до 27 грн 2 грн просто некоректно.



V. Підсумок заняття. Рефлексія.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бевз Г.П., Бевз В.Г. Математика. Підручник для 6 класу. Київ.: Генеза, 2006.
2. Загадки. Ребуси. URL: <http://zagadki.org.ua/ua/>
3. Задачі на зважування. URL: <http://klasnaocinka.com.ua/uk/article/zadachi-na-zvazhuvannya.html>
4. Задачі на зважування. URL: <https://eruditov.net/publ/weight/6-3>
5. Збірник програм для до профільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). /упоряд. Прокопенко Н.С., Вашуленко О.П., Єргіна О.В. Харків.: видавництво «Ранок», 2011. 320 с.
6. Логіка. Збірник задач. 5 – 9 класи. / авт.-уклад. Геращенко В.О. – 2-ге видання, перероблене і доповнене. Харків.: Торсінг плюс, 2012. 384 с.
7. Маланюк П.М. Стежинки до математичних узагальнень. Тернопіль: Мандрівець 1997. 64 с.
8. Математичні шкільні олімпіади. URL: http://olimpmath.blogspot.com/2014/10/blog-post_99.html
9. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Математика: підручник для 6 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Харків: Гімназія, 2014. 400 с.: іл.
10. Нагибин Ф.Ф., Канин Е.С. Математическая шкатулка: пособие для учащихся 4 – 8 кл. сред. шк.5-е изд. Москва: Просвещение, 1988. 160 с.
11. Перельман Я.И. Занимательная геометрия. Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, 1958.303 с.
12. Перельман Я.І. Жива математика: Математичні розповіді та головоломки. Київ.: Видавнича група КМ-БУКС, 2016.176 с.: іл.
13. Приклади софізмів. URL: https://artemenko.at.ua/load/prikladi_sofizmiv_prodozhennja/1-1-0-150
14. Розумова гімнастика на дозвіллі: Матем. головоломки. Логічні задачі. Ігри. Тести. Загадки. / авт.-уклад. Ващенко В.В. Київ: Україна, 1995. 158 с.: іл.
15. Середа В.Ю. Математична логіка в шкільному курсі математики: посібник для самоосвіти вчителів. Київ: Радянська школа, 1984.144 с.
16. Сурядна О.А. Задачі на переливання та зважування. Донецьк: ДонНУ, 2001.
17. Цікаві задачі. URL: <https://mathem.webnode.com.ua/ts%D1%96kav%D1%96-zadach%D1%96/>

Видання підготовлено до друку та віддруковано
 редакційно-видавничим відділом КНЗ «ЧОПООП ЧОР»
 Зам. № 1669 Тираж 100 пр.
 18003, Черкаси, вул. Бидгощська, 38/1